# ÉLÉMENTS D'ANALYSE NON STANDARD

*Avec Exercices Corrigés*

Paul Barbaroux
paul.barbaroux@prepas.org

Version préliminaire n° 5
du 15 février 2006

*« Le traité prend les mathématiques non standard à leur début… »*

TABLE DES MATIERES

# INTRODUCTION

Au début des années 60, A. Robinson découvrait qu'une branche de la logique, la *théorie des modèles*, permettait de donner un fondement mathématique rigoureux au calcul infinitésimal « à la Leibniz » et aux raisonnements à base d'éléments différentiels infiniments petits tels que les pratiquent couramment les physiciens. C'est ainsi qu'est née l'analyse non standard. Elle a cependant vite débordé de ses buts originels pour devenir un domaine très riche de l'analyse, quoiqu'un peu « en marge » à cause de ses fondements logiques un peu déroutants.

La présentation de la théorie a connu une profonde simplification avec l'article désormais célèbre de E. Nelson [N] en 1977. Ce dernier, en posant les bases de la théorie axiomatique « moderne », à la fois propre et accessible au mathématicien non-logicien, a largement contribué à la « démocratisation » de l'analyse non standard. C'est ce point de vue axiomatique que nous adoptons ici.

Il est vrai que le point de vue de Nelson ne permet pas de traiter de façon très commode certaines parties bien précises, en nombre limité cependant, de l'analyse non standard[1]. En contrepartie, on gagne de nombreux avantages par rapport à la méthode de Robinson :

1. Elle permet de mettre en place rapidement, avec très peu de notions de logique, les fondements nécesssaires pour pouvoir travailler.

2. On ne « renie » rien des mathématiques classiques : tout ce qui était vrai (resp. faux) dans les mathématiques classiques le reste dans l'analyse non standard.

3. Les structures dans lesquelles on travaille sont les mêmes que les structures classiques, ce qui n'est pas le cas dans la méthode de Robinson. Prenons par exemple le cas du corps des réels : du point de vue de Robinson, $\mathbb{R}$ se plonge dans un corps ${}^*\mathbb{R}$ d'« hyperréels », non archimédien, et tout hyperréel dont la valeur absolue est inférieure à tout réel strictement positif est appelé infiniment petit. Du point de vue de Nelson, en revanche, on travaille dans le *même* corps $\mathbb{R}$ de nombres réels qu'en mathématiques classiques, évidemment archimédien puisqu'il l'était déjà en mathématiques classiques. Simplement, on sera maintenant capable de distinguer dans ce même ensemble $\mathbb{R}$ des caractéristiques nouvelles des nombres réels ; certains nombres réels acquièrent la propriété d'être *standard,* et un réel compris entre $0$ et tous les réels $> 0$ standard est qualifié d'infiniment petit. Ceci n'est nullement en désaccord avec l'affirmation énoncée dans le point 2., puisque la notion de réel standard n'est tout simplement *pas définie* en mathématiques classiques : la phrase « $x$ est un réel standard » ou « $x$ est un réel infiniment petit non nul » *n'est pas exprimable* en dehors de l'analyse non standard.

D'un point de vue pédagogique, la différence de point de vue est somme toute non négligeable ; Robinson procédait en distinguant de nouveaux objets mathématiques. La théorie axiomatique de Nelson permet de distinguer de *nouvelles propriétés* de ces objets.

4. La réciproque du point 2. est vraie : l'analyse non standard axiomatique à la Nelson est *justifiée* par le fait qu'une phrase s'exprimant dans les mathématiques

---

[1] C'est le cas par exemple, en intégration non standard, des mesures de Loeb. Mais on peut très bien étudier la théorie de la mesure et l'intégration de façon non standard sans utiliser les mesures de Loeb. Voir par exemple tout le chapitre 5.

classiques est démontrable en analyse non standard si, et seulement si, elle possède une démonstration classique. Cette propriété, fondamentale puisqu'elle autorise le mathématicien à démontrer des résultats classiques en se plaçant dans le monde « imaginaire » de l'analyse non standard, fait l'objet d'un théorème de logique que nous admettrons (cf. § 1.5).

La démonstration de ce résultat consiste d'ailleurs précisément à refaire toute l'analyse non standard version « théorie des modèles », à la Robinson. . . Autrement dit, la grande force de la théorie de Nelson est de dégager, à partir de la méthode de Robinson, des *axiomes* qui permettent la *pratique immédiate* de l'analyse non standard, et de concentrer la *justification de cette pratique* dans un théorème qui, une fois admis, permet au non-logicien de dormir sur ses deux oreilles. . .

Tout cela deviendra beaucoup plus clair à la lecture du premier chapitre.

# CHAPITRE 1. AXIOMATIQUE.

## 1.1. Les mathématiques « classiques » : théorie des ensembles.

a) Nous partirons du postulat que les mathématiques usuelles se fondent sur la *théorie des ensembles*, dont nous allons rappeler les grandes lignes. Rappelons tout d'abord que dans cette dernière la notion d'*ensemble* n'est pas réellement définie, mais que tous les objets mathématiques (ensembles et éléments) jouent le même rôle (ou, si l'on veut, tout objet mathématique est un ensemble).

La théorie des ensembles peut être considérée selon deux points de vue équivalents : le point de vue *réaliste* (ou encore *intuitif*, ou *sémantique*), et le point de vue *formaliste* (ou *syntaxique*).

b) Dans le point de vue réaliste, on postule l'existence d'un *univers* (non défini) contenant tous les objets mathématiques possibles et imaginables, et que cet univers est muni d'une relation binaire (notion également primitive), la relation d'appartenance, notée $\in$. Lorsque $x \in y$ on dit que $x$ est élément de (ou appartient à) l'ensemble $y$. On décide enfin que la relation d'appartenance vérifie certaines propriétés (les *axiomes de la théorie des ensembles*), censées refléter l'idée intuitive que l'on se fait d'un ensemble et de la relation qui le lie à ses éléments.

L'inconvénient de ce modèle réside dans les présupposés (notions primitives non définissables) que l'on est obligé de se donner : outre les notions *d'univers* et de *relation binaire* dans l'univers, la notion de *vérité* est également considérée comme intuitive, ainsi que celle *d'égalité* de deux objets mathématiques.

c) Le point de vue formaliste est censé pallier à ces insuffisances. Il considère la théorie des ensembles comme une théorie égalitaire du premier ordre. Plus précisément, la seule notion dont on s'autorise de présupposer l'existence est la *syntaxe* utilisée pour écrire les phrases mathématiques[1]. De ce point de vue, la phrase $x \in y$ n'a pas d'autre *signification* que d'être l'assemblage des trois symboles $x, \in, y$. Le lecteur d'une phrase mathématique est donc libre de lui donner l'interprétation sémantique qu'il souhaite, et la pratique mathématique se ramène alors (en théorie...) à un jeu formel :

• Des règles syntaxiques précisent quels assemblages de symboles représentent des phrases mathématiques « grammaticalement correctes ». D'autres règles, également syntaxiques, précisent, parmi ces phrases, lesquelles sont considérées comme des *axiomes.*

[1] syntaxe étudiée en logique mathématique sous le nom de calcul des prédicats. Du point de vue des fondements des mathématiques, c'est grosso-modo le point de vue adopté dans le traité de Bourbaki, à quelques nuances près (pulvérisation de l'axiome du choix par le signe $\tau$ de Hilbert et son compère le petit carré).

• La notion de *vérité* peut alors être formalisée de façon elle aussi purement syntaxique de la manière suivante : une *démonstration* est une suite de phrases telle que chacune, soit est un axiome, soit se déduit de deux phrases précédentes par la règle du *modus ponens* , elle aussi purement syntaxique : à partir de $A$ et $A \Longrightarrow B$ on peut déduire $B$. Une phrase est dite *vraie* (ou encore appelée un *théorème*) si elle figure à la fin d'une démonstration.

• Les axiomes se divisent en trois catégories : les *axiomes logiques* qui formalisent de manière purement sytaxique les règles du raisonnement logique intuitif (exemple : $A \Longrightarrow A$), règles qui étaient considérées comme une notion primitive (« bon sens logique ») dans le modèle réaliste ; les *axiomes de l'égalité*, qui formalisent les propriétés que l'on est « en droit » d'attendre du symbole d'égalité $=$ ; enfin, les axiomes de la théorie des ensembles proprement dits, qui spécifient les règles auxquelles obéissent le symbole d'appartenance $\in$.

d) Il serait hors de propos d'étudier ou de discuter en détail les divers systèmes d'axiomes de la théorie des ensembles. Le plus communément admis est celui de *Zermelo-Fraenkel*. Nous allons juste donner la liste des axiomes les plus « connus », d'autant plus que la compréhension de certains d'entre eux est primordiale en vue du passage de la théorie des ensembles à l'analyse non standard.

Par souci de clarté nous noterons les variables qui représentent des ensembles en lettres capitales, bien qu'en toute rigueur la distinction ensemble/élément n'ait pas lieu d'être.

**Axiome d'extensionnalité**

Deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes éléments, ce qui s'écrit formellement

$$(A1) \qquad \forall X\, \forall Y\; (X = Y \Longleftrightarrow \forall t\; (t \in X \Longleftrightarrow t \in Y))$$

**Axiome de la paire**

Etant donné deux objets $x$ et $y$, il existe un ensemble dont les seuls éléments sont $x$ et $y$ ; cet axiome s'écrit formellement :

$$(A2) \qquad \forall x\, \forall y\, \exists X\, \forall t\; (t \in X \Longleftrightarrow t = x \text{ ou } t = y)$$

On définit alors les couples en posant $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, les triplets en posant $(x, y, z) = (x, (y, z))$, *etc*

**Axiome des parties**

L'ensemble des parties d'un ensemble existe. En notant pour abréger $A \subset B$ au lieu de $\forall t\; (t \in A \Longrightarrow t \in B)$, cet axiome s'écrit

$$(A3) \qquad \forall X\, \exists Y\, \forall Z\; (Z \in Y \Longleftrightarrow Z \subset X)$$

**Axiome de l'infini**

(A4) Il existe[1] un ensemble infini.[2]

[1] Remarquons que c'est le seul axiome qui assure l'existence d'au moins un ensemble ! Ensuite, étant donné l'existence d'au moins un ensemble $E$, on peut en construire de nombreux autres, à commencer par l'ensemble vide, défini par $\varnothing = \{x \in E \mid x \neq x\}$, dont l'existence est assurée par l'axiome (A6).

[2] Nous n'entrerons pas dans les détails de la définition formelle d'un ensemble infini. Il y a plusieurs

**Axiome de la réunion**

Etant donné un ensemble $E$ d'ensembles, la réunion $\bigcup_{X \in E} X$ des éléments de $E$ existe :

$$(A5) \qquad \forall E\, \exists Y\, \forall x\, (x \in Y \Longleftrightarrow \exists X\, (x \in X \text{ et } X \in E))$$

**Axiome de collectivisation**

Il est aussi appelé axiome de *compréhension*, ou de *séparation*. Nous allons nous attarder davantage sur cet axiome.

Tout d'abord, remarquons qu'étant donnée une propriété $P(x)$, l'ensemble des objets $x$ de l'univers qui vérifient la propriété $P(x)$ peut exister ou non. Par exemple, si $P(x)$ est la propriété « $x$ est un entier naturel » alors cet ensemble existe (c'est l'ensemble $\mathbb{N}$). Si $P(x)$ est « $x \neq x$ » il existe aussi (c'est l'ensemble vide !). En revanche si $P(x)$ est « $x = x$ » on obtient l'ensemble de tous les ensembles, dont on peut prouver facilement qu'il n'existe pas.

L'axiome (ou schéma[1]) de collectivisation stipule qu'étant donné un prédicat $P(x)$, pour tout ensemble $X$ l'ensemble des *éléments de $X$* vérifiant $P$ existe. Autrement dit, on ne peut pas forcément « collectiviser » la propriété $P$ « dans le vide » car les objets qui la vérifient peuvent former une collection trop grosse pour être un ensemble, mais on peut toujours le faire *à l'intérieur d'un ensemble donné.* Cet axiome s'écrit formellement

$$(A6) \qquad \forall X\, \exists Y\, \forall x\, (x \in Y \Longleftrightarrow x \in X \text{ et } P(x))$$

**Axiome du choix**

Il peut s'exprimer de plusieurs façons équivalentes, par exemple :

$(A7)$ Tout produit cartésien d'ensembles non vides est non vide.

En fait, ce n'est pas tant l'axiome du choix qui nous intéresse en vue de l'analyse non standard que l'une de ses conséquences bien connues, appelée **axiome de l'ultrafiltre :**

$(U)$ Tout filtre sur un ensemble est inclus dans un ultrafiltre.

On démontre que l'axiome de l'ultrafiltre est strictement plus faible que l'axiome du choix. On peut décider de considérer un système incluant ou non l'axiome du choix, mais nous verrons (cf. § 1.5 et 1.6) que l'utilisation de l'analyse non standard est justifiée à condition d'admettre au moins l'axiome de l'ultrafiltre.

---

définitions équivalentes possibles et par conséquent plusieurs énoncés formels équivalents de l'axiome de l'infini, mais ce n'est pas notre propos. La seule chose qui importe, on le verra, est que ces différentes définitions, équivalentes en mathématiques classiques, le restent en analyse non standard.

[1] La différence entre un axiome et un schéma d'axiomes est la suivante : un axiome est constitué d'une assertion unique. En revanche, la propriété de collectivisation fait intervenir un prédicat arbitraire $P(x)$. Il ne s'agit donc pas à proprement parler d'un axiome mais d'une infinité d'axiomes, obtenus en substituant à $P(x)$ n'importe quel propriété effective : c'est ce qu'on appelle un schéma d'axiomes. Tous les axiomes logiques, tels que $A \Longrightarrow A$, sont également des schémas d'axiomes.

## 1.2. Vocabulaire de l'Analyse Non Standard.

Nous allons maintenant nous donner les moyens de « sortir » de la théorie des ensembles. Pour cela, on commence par enrichir le vocabulaire en distinguant dans l'Univers des ensembles deux sortes d'objets : ceux qui sont *standard*, et ceux qui... ne le sont pas. De manière formelle, on rajoute aux deux symboles relationnels « $=$ » et « $\in$ » de la théorie des ensembles un troisième symbole, portant sur un seul argument, et qui, appliqué à la variable $x$, se lit : « $x$ est standard ».

Il faut bien comprendre que, de la même façon que l'appartenance ne se définit pas à partir de l'égalité, *il est vain d'essayer d'interpréter le prédicat « standard » en termes ensemblistes :* la notion d'objet standard n'est pas définie dans la théorie des ensembles. Quant à sa signification intuitive, elle sera donnée dans la section suivante, en même temps que seront donnés les *axiomes* de l'analyse non standard, qui vont spécifier le comportement du prédicat « standard » de la même façon que les axiomes de la théorie des ensembles spécifient le comportement de la relation d'appartenance.

Il faut bien comprendre également que la faculté d'être ou de ne pas être standard s'applique à n'importe quel objet mathématique, et qu'il n'y a a priori aucun lien entre le fait qu'un ensemble soit standard et le fait que ses éléments le soient (sauf pour les ensembles finis, cf. § 1.4 )

On appellera *classique* ou *interne* une proposition ne faisant pas intervenir l'adjectif « standard », c'est-à-dire une proposition écrite dans le langage des mathématiques classiques. Par opposition, une proposition quelconque, pouvant éventuellement contenir le prédicat « standard », sera appelée « externe ».

On utilisera la notation abrégée suivante pour relativiser les quantificateurs aux objets standard :

$$\begin{array}{rll} \forall^s x\, P(x) & \text{désigne} & \forall x\,(x \text{ standard} \implies P(x))\,, \\ \text{et} \quad \exists^s x\, P(x) & \text{désigne} & \exists x\,(x \text{ standard et } P(x))\,. \end{array}$$

## 1.3. Les axiomes de l'Analyse Non Standard.

Tout d'abord, on conserve tels quels les axiomes de la théorie des ensembles, sauf le schéma de collectivisation $(A6)$ qui reste valide seulement pour $P$ *classique* (alors que les axiomes logiques, par exemple, tels que $A \implies A$, restent vrais eux, en toute généralité : les phrases externes obéissent au même « bon sens logique » que les mathématiques classiques).

**Remarques**

1. Par exemple, l'ensemble des éléments standard d'un ensemble donné n'a aucune raison d'exister (le prédicat « $x$ est standard » est externe) et on verra d'ailleurs que l'ensemble des entiers standard n'existe pas, alors que, par exemple, l'ensemble des entiers pairs continue d'exister comme il l'a toujours fait (le prédicat « $n$ est un entier pair » est classique).

2. Tous les axiomes de la T.E. étant des propositions classiques, ils restent des axiomes de la nouvelle théorie. Les règles de déduction logique restant les mêmes,

il en résulte que *tous les théorèmes des mathématiques classiques restent vrais en analyse non standard*.

3. Le principe de récurrence, qui se démontre en considérant le plus petit élément de *l'ensemble* des entiers $n \in \mathbb{N}$ ne vérifiant pas $P(n)$, ne demeure donc vrai que pour une propriété $P$ classique. Si $P$ est externe, l'ensemble en question n'a aucune raison d'exister, et a fortiori son plus petit élément...

Il nous faut maintenant donner les axiomes[1] qui vont permettre de manipuler le nouveau prédicat « standard ». Il y en a trois, qui portent les noms poétiques d'Idéalisation, Standardisation, et Transfert, notés par leurs initiales $(I)$, $(S)$, et $(T)$.[2]

**L'axiome de transfert**

Soit $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ une proposition *classique* telle que $x, y_1, \ldots, y_n$ soient les *seules* variables libres intervenant dans $P$. L'axiome de transfert s'écrit alors

$$(T) \qquad \forall^s y_1 \ \ldots \forall^s y_n \, (\exists x\, P \Longleftrightarrow \exists^s x\, P)\,.$$

Autrement dit, dès qu'il existe un objet vérifiant la propriété $P$ il en existe un standard, à condition que $P$ soit classique et que tous les paramètres intervenant dans la propriété aient des valeurs standard.

**Remarques**

1. S'il existe un unique $x$ vérifiant $P(x)$, cet objet $x$ est donc forcément standard.

2. En considérant la négation de $P$ on peut remplacer « $\exists x$ » et « $\exists^s x$ » respectivement par « $\forall x$ » et « $\forall^s x$ ».

3. L'énoncé s'applique en particulier dans le cas où $n = 0$, c'est-à-dire dans le cas d'une propriété $P(x)$ sans paramètre, de la seule variable $x$.

**Exemples**

1. Si $P(x)$ est « $\forall z\, (z \notin x)$ » on obtient : l'ensemble vide est standard ; de même, tous les objets qui sont définis de manière unique et sans paramètre, autrement dit qui sont des constantes de la théorie des ensembles, sont standard. Ainsi, sont par exemple standard :
- les entiers 0, 1, 2, 3, 10, 2006, $10^{10}$, $10^{1000000000}$ ;
- les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ;
- les valeurs absolues, distances, topologies usuelles sur ces ensembles ;
- les fonctions usuelles $\ln$, $\sin$, $\exp$, *etc* ;
- la tribu et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ;
- l'ensemble $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2. Tout objet défini de manière unique à partir de paramètres standard est standard. Par exemple :
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est standard si $n$ est standard ;
- $\mathrm{C}^n(I)$ est standard si l'entier $n$ et et l'intervalle $I$ sont standard ;
- $\mathfrak{M}_n(K)$ est standard si $n$ et $K$ le sont ;

[1] Il s'agit en fait de schémas d'axiomes.

[2] lettres que l'on peut aussi voir comme les initiales I.S.T. de « Internal Set Theory », nom que Nelson a donné à sa théorie.

• Si $E$ et $F$ sont deux ensembles standard alors $E \cup F$, $E \cap F$, $E \times F$, $E^F$, $\mathcal{P}(E)$, $\mathrm{Card}(E)$ (si $E$ est fini), $\{E\}$, *etc* sont standard ;

3. Si $P(x, y_1, y_2)$ est le prédicat « $x \in y_1 \iff x \in y_2$ » on obtient : deux ensembles standard ayant les mêmes éléments standard sont égaux.

4. Si $P(x, y)$ est le prédicat « $x \in y$ » on obtient : tout ensemble standard non vide possède un élément standard.

5. Un couple $(x, y)$ est standard si, et seulement si, $x$ et $y$ le sont (prendre par exemple la définition ensembliste du couple).

Ainsi par exemple, quand nous écrirons « soit $X$ un espace topologique standard », il faudra comprendre : à la fois l'ensemble sous-jacent et la topologie sont standard.

6. Une application est standard si, et seulement si, son ensemble de départ, d'arrivée, et son graphe, sont standard.

7. Si $f$ est une application standard et $x$ standard dans l'ensemble de départ, alors $f(x)$ est standard.

8. Deux applications standard coïncident si, et seulement si, elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et qu'elles prennent les mêmes valeurs en tout point standard de l'ensemble de départ.

**Interprétation intuitive du prédicat « standard »**

On commence à entrevoir la *signification intuitive* du prédicat « standard » : sont standard les objets *particuliers*, c'est-à-dire que l'on peut *nommer*[1]. Ainsi l'entier $10^{10}$ est standard puisque nous pouvons le nommer ; de même les réels $e$ et $\pi$ sont standard. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, tout entier, par exemple, ne peut être nommé, pour la simple raison que le mot « nommer » ne s'exprime pas dans le langage mathématique, et donc la phrase « tout entier peut être nommé », qui n'est pas exprimable dans le langage mathématique, n'a a fortiori aucune chance d'être démontrée...

On peut également considérer que les entiers standard sont les entiers que nous appellerons *effectifs* ou encore *intuitifs*, qui interviennent dans les décomptes *d'éléments de syntaxe*, par exemple le nombre de symboles constituant une proposition mathématique *une fois que celle-ci est écrite :* on peut coucher sur du papier une phrase constituée de 10, 100, ou 1000 signes, mais pas de $n$ signes où $n$ est un entier non standard.[2]

**L'axiome de standardisation**

C'est une sorte de principe de collectivisation qui fonctionne même pour les propriétés externes : Soit $P(x, \ldots)$ une propriété *quelconque,* pouvant dépendre, en plus de la variable $x$, d'un nombre quelconque de paramètres. L'axiome de standardisation s'écrit

$$(S) \qquad \forall^s X \, \exists^s Y \, \forall^s x \, (x \in Y \iff x \in X \text{ et } P(x)) \, .$$

[1] On verra qu'en analyse les objets (en particulier les fonctions) standard s'interprètent comme ceux que l'on peut *observer.*

[2] Dans le même ordre d'idées : le nombre de caractères composant cet article est un entier standard...

**Remarques**

1. Puisqu'un ensemble standard est uniquement déterminé par ses éléments standard, l'ensemble $Y$ ainsi défini est unique. On le note

$$^s\{x \in X \mid P(x)\}\,.$$

C'est donc l'unique ensemble standard $Y$ dont les éléments standard sont les éléments standard de $X$ vérifiant $P$.

2. L'ensemble $Y = {}^s\{x \in X \mid P(x)\}$ est inclus dans $X$ ; en effet,

$$\forall^s x\,,\ (x \in Y \Longrightarrow x \in X)\,,$$

et donc, par transfert (les paramètres $X$ et $Y$ sont standard),

$$\forall x\,,\ (x \in Y \Longrightarrow x \in X)\,.$$

**L'axiome d'idéalisation**

C'est le seul qui assure l'existence d'objets non standard[1]. Soit $P(x, y, \ldots)$ une propriété *classique,* mais pouvant contenir d'autres variables que $x$ et $y$. L'axiome d'idéalisation s'écrit

$$(I) \qquad (\exists x\,\forall^s y\; P(x,y)) \Longleftrightarrow (\forall^s F \text{ ensemble fini } \exists x\,\forall y \in F\; P(x,y))\,.$$

**Exemples**

On vérifie immédiatement que le second membre de $(I)$ est vérifié pour les prédicats $P(x, y)$ suivants :

- « $x$ est fini et $y \in x$ » ;
- « $x \in \mathbb{N}$ et $(y \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \geqslant y)$ » ;
- « $x \in X$ et $(y \in X \Longrightarrow x \neq y)$ » (si $X$ est un ensemble infini donné).

On en déduit respectivement par application du premier membre :

• Il existe un ensemble fini contenant tous les objets standard de l'Univers. Comme corollaire, pour tout ensemble $X$ il existe un sous-ensemble fini $Y$ de $X$ contenant tous les éléments standard de $X$. En pratique, c'est souvent ce corollaire que l'on utilise à la place de l'axiome $(I)$ sous sa forme initiale.

• Il existe un entier naturel $n$ supérieur à tous les entiers naturels standard ; un tel entier est appelé *infiniment grand* (en abrégé i.g.). Evidemment, un tel entier n'est pas standard puisque si $n$ est standard par transfert $n + 1$ est standard, ce qui empêche $n$ d'être infiniment grand.

• Tout ensemble infini a un élément non standard.

---

[1] On a vu à propos de l'axiome de transfert que de tels objets non standard ne pourront jamais être *explicités.* Cela peut sembler décevant mais c'est un phénomène qui se produit déjà dans les mathématiques classiques pour les objets dont l'existence découle de l'axiome du choix : qui a jamais *contemplé* un ultrafiltre non trivial ou une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ ?

## 1.4. Ensembles standard finis.

**Théorème.** *(Caractérisation des ensembles standard finis) Soit $E$ un ensemble. Alors tous les éléments de $E$ sont standard si, et seulement si, $E$ est à la fois standard et fini.*

En prenant pour $P(x, y)$ le prédicat « $x \in E$ et $x \neq y$ », l'axiome d'idéalisation donne, après passage à la négation : tous les éléments de $E$ sont standard si, et seulement si, $E$ est inclus dans un ensemble standard fini. Le sens « si » dans l'énoncé du théorème en résulte.

Réciproquement, si tous les éléments de $E$ sont standard alors $E$ est donc inclus dans un ensemble standard fini $F$. Mais alors $E \in \mathcal{P}(F)$. Or $F$ est fini donc $\mathcal{P}(F)$ aussi (classique donc toujours vrai), et $F$ est standard donc $\mathcal{P}(F)$ aussi par transfert. D'après le premier sens tous les éléments de $\mathcal{P}(F)$ sont donc standard, et en particulier $E$ est standard. □

Le résultat suivant prouve en particulier que l'ensemble des entiers standard n'existe pas[1] :

**Corollaire.** *Si $E$ est un ensemble standard infini, l'ensemble des éléments standard de $E$ n'existe pas.*

Supposons par l'absurde l'existence de $F$, ensemble des éléments standard de $E$. Tous les éléments de $F$ étant standard, $F$ est standard fini. Par transfert, $E$ étant standard, $E \setminus F$ est standard, et non vide car $E$ est infini. Par transfert $E \setminus F$ possède donc un élément standard, ce qui contredit la définition de $F$. □

**Remarque.** Si $n \in \mathbb{N}$ est standard alors par transfert $[\![ 0, n ]\!]$ est standard, et donc, d'après le théorème précédent, tout entier $k \in [\![ 0, n ]\!]$ est standard. Par conséquent, tout entier naturel majoré par un entier standard est lui-même standard, et donc tout entier non standard est infiniment grand : les entiers naturels infiniment grands sont exactement les non standard. On « visualise » ainsi facilement la structure non standard de $\mathbb{N}$ : viennent dans l'ordre les entiers standard, puis les non standard. Mais il ne faudrait pas en déduire qu'on obtient ainsi une *partition* de $\mathbb{N}$ en deux sous-ensembles, puisque l'ensemble des entiers naturels standard n'existe pas.

## 1.5. La conservativité de la nouvelle théorie.

On notera suivant Nelson la nouvelle théorie I.S.T. (« Internal Set Theory »), et on notera T.E. la Théorie des Ensembles.

On a vu que tout ce qui s'exprime et qui est vrai dans T.E. reste vrai dans I.S.T. Ce qui est rassurant, c'est qu'inversement ne démontre pas plus de choses dans cette nouvelle théorie que dans T.E. Autrement dit, si un énoncé *classique* est démontrable dans I.S.T., c'est qu'il était déjà démontrable dans T.E., ce que l'on désigne par le résultat suivant que l'on admettra :

**(Méta[2])théorème :** *I.S.T. est une extension conservative de T.E.*

[1] Signalons à ce propos qu'il existe des théories de l'Analyse Non Standard où l'on distingue des ensembles internes et externes et qui permettent de collectiviser *toute* propriété.

[2] Il s'agit évidemment d'un *véritable* théorème de logique mathématique (classique…). Le préfixe

En fait, ce théorème est vrai pourvu que l'on incorpore à T.E. l'axiome de l'ultrafiltre. D'ailleurs, la démonstration du théorème utilise elle-même l'axiome de l'ultrafiltre.[3]

## 1.6. Statut des ultrafiltres en Analyse Non Standard.

La démonstration du théorème précédent nécessite de solides notions de logique. En revanche, nous allons voir maintenant que l'on peut prouver facilement la nécessité d'inclure l'axiome de l'ultrafiltre dans T.E. si l'on veut espérer que I.S.T. soit conservative. En effet, I.S.T. permet de récupérer l'axiome de l'ultrafiltre, car il est lui-même démontrable en n'utilisant que les axiomes (A1) à (A6) et (I), (S) et (T) !

Tout d'abord, revenons un instant aux mathématiques classiques, et considérons un ensemble $X$ non vide, et $\omega \in X$. L'ensemble $\mathcal{F}_\omega$ des parties de $X$ contenant $\omega$ est un ultrafiltre sur $X$, appelé ultrafiltre trivial. Un ultrafiltre est trivial si, et seulement si, il contient un singleton. Sur un ensemble fini tous les ultrafiltres sont triviaux, et si $X$ est infini, en mathématiques classiques les ultrafiltres triviaux sont les seuls que l'on sache *expliciter,* l'existence d'ultrafiltres non triviaux découlant de l'axiome de l'ultrafiltre. C'est le cas, par exemple, d'un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ contenant le *filtre de Fréchet* constitué des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cadre de l'A.N.S. et supposons que l'ensemble $X$ soit standard. On peut considérer, en plus de l'ensemble $\mathcal{F}_\omega$ décrit ci-dessus, l'ensemble $\mathcal{G}_\omega = {}^s\mathcal{F}_\omega = {}^s\{F \in \mathcal{P}(X) \mid F \in \mathcal{F}_\omega\}$, ensemble des parties de $X$ dont les éléments standard sont les éléments standard de l'ultrafiltre trivial $\mathcal{F}_\omega$.

Si $\omega$ est standard alors par transfert $\mathcal{F}_\omega$ l'est aussi donc $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{F}_\omega$. Mais si $\omega$ est non standard (ce qui suppose que l'ensemble $X$ soit infini), on vérifie facilement que $\mathcal{G}_\omega$ est un ultrafiltre *non trivial* sur $X$.

Tout d'abord, il s'agit bien d'un ultrafiltre, car par transfert il suffit de vérifier que tout élément standard de $\mathcal{G}_\omega$ est non vide, que l'intersection de deux éléments standard de $\mathcal{G}_\omega$ est dans $\mathcal{G}_\omega$, que toute partie standard de $X$ contenant un élément standard de $\mathcal{G}_\omega$ est dans $\mathcal{G}_\omega$, et que pour toute partie standard de $X$, elle-même ou son complémentaire est dans $\mathcal{G}_\omega$. Mais cela découle de la définition de $\mathcal{G}_\omega$ et du fait que $\mathcal{F}_\omega$ est un ultrafiltre.

Enfin, $\mathcal{G}_\omega$ est non trivial. En effet, sinon on aurait

$$\exists a \in X\ ,\ \{a\} \in \mathcal{G}_\omega\ ,$$

et donc, d'après l'axiome de transfert et la définition de $\mathcal{G}_\omega$,

$$\exists^s a \in X\ ,\ \{a\} \in \mathcal{F}_\omega\ ,$$

donc $\omega = a$ serait standard, ce qui n'est pas le cas.

---

*méta* est seulement là pour indiquer qu'il ne s'agit pas d'un théorème *dans le système d'axiomes de la nouvelle théorie* mais d'un théorème *portant sur* la théorie.

[3] Nous conseillons au lecteur intéressé par la démonstration de commencer à se familiariser avec l'analyse non standard par la lecture du très pédagogique [ROB], puis avec le point de vue de Robinson [R] avant d'attaquer la démonstration proprement dite dans l'article original de Nelson [N] ou dans [L].

La donnée d'un élément non standard $\omega$ de $X$ nous a donc permis de *construire* un ultrafiltre non trivial sur un ensemble infini standard $X$ (et donc, par transfert, sur tout ensemble infini. . . )

Par exemple, si $X = \mathbb{N}$ et si $\omega \in \mathbb{N}$ est infiniment grand, l'ultrafiltre $\mathcal{G}_\omega$ obtenu contient le filtre de Fréchet (ensemble des complémentaires des parties finies), puisque le complémentaire d'une partie finie standard contient $\omega$ et est donc élément de $\mathcal{G}_\omega$, et par transfert le complémentaire d'une partie finie quelconque est dans $\mathcal{G}_\omega$.

En généralisant cette construction on voit bien maintenant comment *démontrer* l'axiome de l'ultrafiltre dans I.S.T. : étant donné un filtre quelconque $\mathcal{H}$ sur un ensemble $X$, par transfert $X$ et $\mathcal{H}$ peuvent être supposés standard, et il suffit de considérer l'intersection d'un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{H}$ contenant tous les éléments standard de $\mathcal{H}$ : cette intersection étant non vide puisque $\mathcal{H}$ est un filtre, elle contient au moins un point $\omega$, et la construction vue plus haut donne des ultrafiltres $\mathcal{F}_\omega$ et $\mathcal{G}_\omega$ avec $\mathcal{G}_\omega$ standard, et $\mathcal{G}_\omega$ contenant $\mathcal{H}$ par transfert.

## 1.7. Exercices.

**1.** Quels sont les ensembles dont toutes les parties sont standard ? Quels sont les ensembles dont toutes les parties finies sont standard ?

**2.** Décrire les ensembles $E$ vérifiant respectivement l'une des propriétés suivantes :

a) Pour tous éléments distincts $x$, $y$ de $E$, il existe une partition de $E$ en deux parties standard séparant $x$ et $y$.

b) Pour tous éléments distincts $x$, $y$ de $E$, il existe deux parties standard de $E$ séparant $x$ et $y$.

c) Pour tous éléments distincts $x$, $y$ de $E$, il existe une partie standard de $E$ contenant $x$ mais pas $y$.

d) Pour tous éléments distincts $x$, $y$ de $E$, il existe une partie standard de $E$ contenant l'un des deux points mais pas l'autre.

**3.** *Ensembles universels.* --- Un ensemble $E$ est dit *universel* si $\forall^s x\,,\, x \in E$ (autrement dit : $E$ contient tous les objets standard de l'univers ; il résulte de l'axiome d'idéalisation qu'il existe un ensemble universel fini).

a) Montrer qu'un ensemble universel fini a un cardinal infiniment grand. Montrer que pour tout entier naturel infiniment grand $\omega$, il existe un ensemble universel de cardinal $\omega$.

b) Montrer que tout ensemble universel $E$ admet comme élément un ensemble universel fini $X$. Montrer que l'on peut choisir $X$ de telle sorte que chacun des ensembles $\{X\}$, $X \times X$, $\mathcal{P}(X)$, $X^X$, ainsi que tous les éléments et toutes les parties de $X$, soient éléments de $E$, et tel que le cardinal de $X$ soit inférieur à un entier naturel infiniment grand donné.

**4.** *Entiers $\omega$-inaccessibles.* --- Soient $\omega$ et $\omega'$ deux entiers naturels. L'entier $\omega'$ est dit *$\omega$-inaccessible* (ce que l'on note $\omega \prec \omega'$) si pour toute suite standard $s$ d'entiers naturels, $s(\omega) < \omega'$ (ainsi, un entier $\omega$-inaccessible dépasse $\omega$, $\omega^2$, $\omega^\omega$, et plus généralement tout entier défini à partir de $\omega$ par une expression interne). Dans le cas contraire, $\omega'$ est dit $\omega$-accessible (noté $\omega \not\prec \omega'$).

a) Quels sont les entiers $0$-inaccessibles ?

b) Montrer que pour tout entier naturel $\omega$, il existe un entier $\omega$-inaccessible.

c) Soit $\omega \in \mathbb{N}$, et $E$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Montrer que si $E$ contient tous les entiers $\omega$-accessibles, il contient un intervalle $[\![\, 0, \omega' \,]\!]$ où $\omega'$ est $\omega$-inaccessible.

d) Montrer que si $\omega \not\prec \omega'$ et $\omega' \not\prec \omega''$ alors $\omega \not\prec \omega''$.

e) Montrer que si $\omega_1, \omega_2 \prec \omega$ et si $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application standard, alors $f(\omega_1, \omega_2) \prec \omega$.

**5.** Soient $\omega, \omega' \in \mathbb{N}$ tels que $\omega \prec \omega'$ (cf. exercice 4).

a) Montrer qu'il existe $\omega_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \prec \omega_1 \prec \omega'$.

b) Montrer que pour tout entier naturel standard $p$, il existe $\omega_1, \ldots, \omega_p$ tels que $\omega \prec \omega_1 \prec \omega_2 \prec \cdots \prec \omega_p \prec \omega'$.

c) Montrer qu'il en est de même pour tout entier $p$ tel que $\omega \not\prec p$.

d) Montrer qu'il existe $\omega_1, \ldots, \omega_p$ tels que $\omega \prec \omega_1 \prec \omega_2 \prec \cdots \prec \omega_p \prec \omega'$ si, et seulement si, $p \prec \omega'$.

**6.** *Eléments indiscernables.* --- Soit $E$ un ensemble standard. Deux éléments $x$ et $y$ de $E$ sont dits *indiscernables* si toute partie standard de $E$ contenant $x$ contient $y$.

a) Montrer que l'indiscernabilité est une relation d'équivalence sur $E$.

b) Soit $x_0 \in E$ standard. Quels sont les éléments de $E$ indiscernables de $x_0$ ?

c) Soit $x_0 \in E$ et $f$ une application standard de $E$ dans lui-même telle que $f(x_0) \neq x_0$. Définir une application standard $g$ de $E$ dans lui-même, sans point fixe, telle que $g(x_0) = f(x_0)$. Montrer qu'il existe un coloriage (partition) standard de $E$ en au plus trois couleurs tel qu'un élément de $E$ ne soit jamais de la même couleur que son image par $g$. En déduire que $x_0$ et $f(x_0)$ ne sont pas indiscernables.

d) Dans cette question on suppose $E$ infini. Montrer que pour tout élément non standard $\omega$ de $E$, il existe une partie infinie de $E$ dont tous les éléments sont indiscernables de $\omega$.

**7.** Soit $E$ un ensemble standard, et $F$ une partie de $E$. Montrer que de tout recouvrement $F$ par des parties standard de $E$ on peut extraire un sous-recouvrement fini. Plus précisément, montrer que si $P(x)$ est un prédicat quelconque tel que tout élément de $F$ appartienne à une partie standard de $E$ vérifiant $P$, il existe un ensemble standard fini de parties de $E$ qui vérifient $P$ et dont la réunion contient $F$.

**8.** Montrer qu'une intersection d'ensembles standard, si elle existe, est nécessairement standard. Plus précisément, si $P(x)$ un prédicat quelconque, et s'il existe un ensemble $E$, intersection des ensembles standard vérifiant $P$, alors $E$ est standard.

**9.** Soit $E$ un ensemble standard et $\omega$ un élément non standard de $E$. Montrer que l'ensemble des éléments de $E$ indiscernables de $\omega$ (cf. ex. 6) n'existe pas (utiliser l'ex. 8).

*(Dans les exercices qui suivent le mot « dénombrable » signifie « au plus dénombrable ».)*

**10.** Soit $X$ un ensemble standard non dénombrable. Un élément de $X$ est dit *de rang dénombrable* s'il appartient à une partie standard dénombrable de $X$.

a) Montrer que tout élément standard de $X$ est de rang dénombrable. Etudier la réciproque.

b) Tout élément de $X$ peut-il être de rang dénombrable ?

c) Montrer qu'il existe une partie dénombrable de $X$ contenant tous les éléments de rang dénombrable. Existe-t-il une partie finie de $X$ qui les contienne ?

d) Soit $E$ une partie de $X$. Montrer que tous les éléments de $E$ sont de rang dénombrable si, et seulement si, $E$ est inclus dans un ensemble standard dénombrable.

e) Montrer que l'ensemble des éléments de rang dénombrable de $X$ n'existe pas.

# CHAPITRE 2.
# LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ANALYSE NON STANDARD.

## 2.1. Le principe de récurrence externe.

**Théorème 1.** *(Principe de récurrence externe) Soit $P(n)$ un prédicat quelconque tel que l'on ait*

$$P(0), \text{ et } \forall^s n \in \mathbb{N}\,,\ (P(n) \Longrightarrow P(n+1))\,.$$

*Alors est vraie l'assertion $\forall^s n \in \mathbb{N}\,,\ P(n)$.*

Soit $A = {}^s\{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. Alors $0 \in A$, et $\forall^s n\ (n \in A \Longrightarrow n+1 \in A)$ (car si $n$ est standard alors $n+1$ aussi). Par transfert, c'est vrai pour tout $n$, et le principe de récurrence usuel donne alors $A = \mathbb{N}$. □

## 2.2. Le principe de construction.

**Théorème 2.** *(Principe de construction) Soient $X$ et $Y$ deux ensembles standard, et $P(x,y)$ un prédicat quelconque vérifiant*

$$\forall^s x \in X\,,\ \exists^s! y \in Y\,,\ P(x,y)\,.$$

*Alors il existe une unique application standard $f : X \longrightarrow Y$ telle que*

$$\forall^s x \in X\,,\ P(x, f(x))\,.$$

L'unicité résulte du fait que deux fonctions qui conviennent coïncident en tout point standard donc sont égales par transfert.

Pour l'existence il suffit de considérer l'ensemble

$$G = {}^s\{(x,y) \in X \times Y \mid P(x,y)\}\,.$$

Cet ensemble est une partie standard de $X \times Y$. L'hypothèse faite sur $P$ donne

$$\forall^s x \in X\,,\ \exists^s! y \in Y\,,\ (x,y) \in G\,,$$

et donc, par transfert,

$$\forall x \in X\,,\ \exists! y \in Y\,,\ (x,y) \in G\,,$$

donc $G$ est le graphe d'une application de $X$ dans $Y$, et, donc, par transfert, d'une application standard. □

Si l'on considère $X$ comme un ensemble d'indices, l'application $f$ devient alors un élément du produit cartésien $Y^X$. Le résultat précédent se généralise alors à un produit cartésien quelconque (la démonstration est tout-à-fait similaire) :

**Théorème 3.** *(Principe de construction généralisé) Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille standard d'ensembles, et $P(x,y)$ un prédicat quelconque vérifiant*

$$\forall^s i \in I\,,\ \exists^s! y \in Y_i\,,\ P(i,y)\,.$$

*Alors il existe une unique famille standard $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$ telle que*

$$\forall^s i \in I\,,\ P(i,y_i)\,.$$

Une autre généralisation consiste à ne pas imposer l'unicité de $y \in Y_i$ vérifiant $P(i,y)$. On obtient alors le résultat suivant, valide à condition d'autoriser l'axiome du choix :

**Théorème 4.** *(Principe de construction généralisé avec choix) Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille standard d'ensembles, et $P(i,y)$ un prédicat quelconque vérifiant*

$$\forall^s i \in I\,,\ \exists^s y \in Y_i\,,\ P(i,y)\,.$$

*Alors il existe une famille standard $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$ telle que*

$$\forall^s i \in I\,,\ P(i,y_i)\,.$$

En effet, appliquons le principe de construction généralisé , dans le produit cartésien $\prod_{i\in I} \mathcal{P}(Y_i)$ (la famille $(\mathcal{P}(Y_i))$ est standard par transfert), au prédicat $Q(i,Y)$ défini par

$$« Y = {}^s\{y \in Y_i \mid P(i,y)\} ».$$

On obtient alors une famille standard $(Z_i) \in \prod_{i\in I} \mathcal{P}(Y_i)$ telle que

$$\forall^s i \in I\,,\ Z_i = {}^s\{y \in Y_i \mid P(i,y)\}\,.$$

Par hypothèse $Z_i$ est non vide pour $i \in I$ standard, et par transfert c'est vrai pour tout $i \in I$. L'axiome du choix fournit alors une famille $(y_i)$ telle que $\forall i \in I\,,\ y_i \in Z_i$. Mais pour $i$ standard, $y_i \in Z_i$ équivaut à $P(i,y_i)$. □

## 2.3. Ensembles admissibles. Standardisé d'un ensemble. Standardisé d'une application.

**Proposition 1. et définition 1.** *Soit $A$ un ensemble. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i) Il existe un ensemble standard $X$ tel que $A \subset X$ ;*

*(ii) Il existe un ensemble standard $\mathcal{X}$ tel que $A \in \mathcal{X}$.*

*Lorsque ces propriétés sont vérifiées l'ensemble $A$ est dit* admissible.

Si $A \subset X$ avec $X$ standard alors $A \in \mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{X} = P(X)$ est standard par transfert. Donc (i)$\Longrightarrow$(ii). Inversement, si $A \in \mathcal{X}$ avec $\mathcal{X}$ standard, alors $A \subset \bigcup_{X\in\mathcal{X}} X$, standard par transfert. □

**Proposition 2. et définition 2.** *Soit $A$ un ensemble admissible. Il existe un unique ensemble standard dont les éléments standard soient les éléments standard de $A$. On l'appelle le* standardisé *de $A$ et on le note ${}^sA$.*

L'unicité vient du fait qu'un ensemble standard est uniquement déterminé par ses éléments standard. Pour l'existence, il suffit de se donner un ensemble $X$ standard contenant $A$, et de poser

$$^sA = {}^s\{x \in X \mid x \in A\}\,.$$

Cet ensemble est bien défini car il ne dépend pas de $X$. □

**Proposition 3 et définition 3.** *Soient $X$ et $Y$ deux ensembles standard et $f$ une application de $X$ dans $Y$ telle que pour tout élément standard $x$ de $X$, $f(x)$ soit standard. Il existe alors une unique application standard $g$ de $X$ dans $Y$ qui coïncide avec $f$ en tout point standard de $X$. On l'appelle la* standardisée *de $f$ et on la note ${}^sf$.*

Il suffit d'appliquer le principe de construction au prédicat $y = f(x)$. □

**Proposition 4.** (Les propriétés suivantes se vérifient sans difficulté)

1. Un ensemble $A$ est standard si, et seulement si, $A = {}^sA$. Une application $f$ est standard si, et seulement si, $f = {}^sf$.

2. La standardisation est compatible avec les images réciproques : Si $X$ et $Y$ sont deux ensembles standard et $f : X \longrightarrow Y$, $B \subset Y$, et si ${}^sf$ existe, alors

$$^s(f^{-1}(B)) = ({}^sf)^{-1}({}^sB)\,.$$

Pour les images directes on n'a qu'une inclusion : si $A \subset X$, alors

$$({}^sf)({}^sA) \subset {}^s(f(A))\,.$$

4. Si $X$ est un ensemble standard et $A \subset X$, la fonction caractéristique de ${}^sA$ est la standardisée de celle de $A$.

5. Si $X$ et $Y$ sont standard et $f : X \longrightarrow Y$, le graphe de ${}^sf$ est le standardisé de celui de $f$.

## 2.4. Théorie non standard des ensembles ordonnés.

**Définition 4.** *Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et $x \in E$. On dit que $x$ est* infiniment grand *(en abrégé i.g.) si $\forall^s a \in E\,,\ a \leqslant x$.*

On rappelle qu'un ensemble ordonné est dit *filtrant supérieurement* (ou plus simplement filtrant, le cas des ensembles filtrants inférieurement s'en déduisant par renversement de l'ordre) si toute partie à deux éléments est majorée. Par récurrence toute partie finie est alors majorée.

**Proposition 5.** *Si $(E, \leqslant)$ est standard, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*(i) $E$ est filtrant ;*
*(ii) $E$ possède un élément infiniment grand.*

En effet, on a :

$E$ possède un élément infiniment grand

$\iff$ toute partie standard finie est majorée (ax. d'idéalisation)

$\iff$ toute partie finie est majorée (par transfert, $E$ étant standard)

$\iff$ $E$ est filtrant (classique, donc toujours vrai)

**Remarque.** Si $(E, \leqslant)$ est filtrant standard, par transfert si $E$ n'a pas de plus grand élément les éléments i.g. sont non standard ; inversement, si $E$ possède un plus grand élément $a$ alors $a$ est l'unique élément de $E$ à la fois i.g. et standard.

**Définition 5.** *Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, et $x \in E$. On dit que $x$ est* limité supérieurement (resp. inférieurement) *si $\exists^s a \in E\,,\ x \leqslant a$ (resp. $a \leqslant x$).*

Si $E$ est totalement ordonné tout élément de $E$ est soit limité supérieurement, soit infiniment grand. Dans ce cas les éléments limités servent également à caractériser les parties majorées :

**Proposition 6.** *Soit $E$ un ensemble totalement ordonné standard et $A$ une partie standard de $E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
*(i) $A$ est majorée ;*
*(ii) Tout point de $A$ est limité supérieurement.*

Supposons $A$ majorée. Alors par transfert $A$ possède un majorant standard, de sorte que tout point de $A$ est limité supérieurement. Inversement, si tout point de $A$ est majoré par un élément standard, il suffit de considérer un sous-ensemble fini de $E$ contenant tous les éléments standard : cet ensemble, fini et totalement ordonné, possède un plus grand élément (classique donc toujours vrai), lequel est un majorant de $A$. $\square$

## 2.5. Structure non standard de la droite réelle.

**Définition 6.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On dira que*
- *$x$ est* illimité *si $|x|$ est i.g. ;*
- *$x$ est* limité *s'il n'est pas illimité (i.e. $\exists^s r > 0\,,\ |x| \leqslant r$) ;*
- *$x$ est* infiniment petit *(en abrégé i.p.) si $\forall^s r > 0\,,\ |x| \leqslant r$ ;*
- *$x$ est* appréciable *si $x$ n'est ni illimité, ni infiniment petit ;*
- *$x$ est* infiniment proche de *$y$ (noté $x \simeq y$) si $x - y$ est i.p.*

Le prédicat $\simeq$ ainsi défini porte le nom de *proximité métrique,* terme qui deviendra clair au § 4.1. La lecteur vérifiera facilement que c'est une relation d'équivalence, mais nous attirons son attention sur le fait qu'il ne s'agit pas d'une vraie relation binaire au sens ensembliste du terme car on ne peut pas en collectiviser un graphe, pas plus que n'existe *l'ensemble* des réels infiniments petits.

Le lecteur vérifiera également qu'un réel est limité dans le sens défini ci-dessus si, et seulement si, il est limité à la fois supérieurement et inférieurement au sens de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, et qu'il est illimité si, et seulement si, il est non nul et si son inverse est i.p.

Par transfert deux réels *standard* infiniment proches sont nécessairement égaux.

Les preuves des propriétés suivantes sont faciles et laissées au lecteur.

**Proposition 7.** *Soient $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.*

1. *$x$ est i.p. $\Longleftrightarrow x \simeq 0$ ;*
2. *($x \simeq 0$ et $y$ limité ) $\Longrightarrow xy \simeq 0$ ;*
3. *($x \simeq y$ et $x' \simeq y'$) $\Longrightarrow x + x' \simeq y + y'$ ;*
4. *($x \simeq y$ et $x' \simeq y'$ et $x$ ou $y$ limité et $x'$ ou $y'$ limité ) $\Longrightarrow xx' \simeq yy'$ ;*
5. *($x \simeq y$ et $x$ non i.p.) $\Longrightarrow 1/x \simeq 1/y$.*

**Proposition 8.** *(Caractérisation non standard de la borne supérieure) Soit $A$ une partie standard de $\mathbb{R}$ et $a$ un réel standard. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
*(i) $a$ est la borne supérieure de $A$ ;*
*(ii) $a$ est un majorant de $A$ et il existe un point de $A$ infiniment proche de $a$.*

En effet, si $a = \sup\ A$ tout intervalle $]a-\varepsilon, a]$ ($\varepsilon > 0$) rencontre $A$ et en prenant $\varepsilon \simeq 0$ on obtient un point de $A$ infiniment proche de $A$. Inversement, si $a$ est un majorant de $A$ et s'il existe $x \in a$ tel que $x \simeq a$, alors tout intervalle $]a - r, a]$ avec $r > 0$ standard contient $x$, donc rencontre $A$, et par transfert tout intervalle $]a-r, a]$ ($r > 0$) rencontre $A$ donc $a = \sup\ A$. □

Le théorème qui suit est d'une certaine façon l'équivalent non standard de l'axiome de la borne supérieure dans les réels. Nous verrons à la section 3. que ce théorème redonne, de façon non standard, la compacité locale de $\mathbb{R}$.

**Théorème 5.** *Tout réel limité est infiniment proche d'un unique réel standard.*

L'unicité provient du fait que deux réels standard distincts ne peuvent être infiniment proches.

La démonstration de l'existence va nous être suggérée par la remarque suivante : considérons par exemple un réel $\varepsilon > 0$ i.p. *L'ensemble* des réels standard inférieurs (resp. supérieurs) à $\varepsilon$ n'existe pas. Néanmoins, il existe un plus grand réel standard inférieur à $\varepsilon$, à savoir $0$. Nous allons voir que pour un réel limité $x$ quelconque, il existe un réel standard $x_0$ qui est soit le plus grand réel standard inférieur à $x$, soit le plus petit réel standard supérieur à $x$, et que $x \simeq x_0$.

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ limité. Il existe donc un réel standard (positif) $M$ tels que $|x| \leqslant M$.

Soit $A = {}^s\{a \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$. le réel $-M$ est dans $A$ donc $A \neq \varnothing$. De plus tout réel $a \in A$ standard vérifie $a \leqslant x \leqslant M$, donc par transfert $A$ est majorée par $M$, donc possède une borne supérieure $x_0$, elle-même standard par transfert.

Si $x_0 \leqslant x$, l'intervalle $]x_0, x]$ ne contient aucun réel standard, car sinon $x_0$ ne serait pas un majorant de $A$, et $x_0$ est donc le plus grand réel standard inférieur à $x$. Dans ce cas pour tout réel standard $r > 0$ on a $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + r$ ($x_0 + r$ est standard par transfert) et donc $0 \leqslant x - x_0 \leqslant r$ donc $x \simeq x_0$.

Si $x_0 > x$, l'intervalle $[x, x_0[$ ne contient aucun réel standard, car sinon il y aurait un réel standard $x_1 < x_0$ majorant tous les éléments standard de $A$ et donc, par transfert, majorant $A$, et $x_0$ ne serait pas le plus petit majorant de $A$. On termine alors comme au cas précédent, en considérant cette fois $x_0 - r$. □

**Définition 7.** *Si $x$ est limité, l'unique réel standard infiniment proche de $x$ est noté $x^*$ et appelé la* partie standard *de $x$.*

On vérifie aisément les propriétés suivantes, qui sont les analogues non standard des théorèmes généraux sur les limites :

**Proposition 9.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}$.*

*1. $x^* = 0 \Longleftrightarrow x \simeq 0$ ;*

*2. (Conservation des inégalités par passage à la partie standard) Si $x$ est un réel limité, $a$ un réel standard, et si $x \leqslant a$, alors $x^* \leqslant a$.*

*3. Si $x$ et $y$ sont limités alors $x \leqslant y \Longrightarrow x^* \leqslant y^*$ ;*

*4. Si $x$ et $y$ sont limités alors $x+y$ et $xy$ le sont, et $(x+y)^* = x^*+y^*$, et $(xy)^* = x^*y^*$ ;*

*5. $1/x$ est limité si, et seulement si, $x$ n'est pas i.p., et dans ce cas $(1/x)^* = 1/x^*$.*

**Remarques**

1. On commence à entrevoir la structure non standard de la droite réelle : chaque point standard $x_0$ possède un « halo »[1] constitué des points qui lui sont infiniment proches, symétrique par rapport à $x_0$. L'ensemble $\mathbb{R}$ est « partitionné » de la façon suivante : à droite se trouvent les réels i.g., à gauche leurs opposés, et, entre les deux, les halos des points standard, deux à deux disjoints et se déduisant l'un de l'autre par translation par un réel standard.

2. Deux cas se présentent pour un réel $x$ limité mais non standard : $x^* < x$ ou $x^* > x$. Prenons le cas, pour fixer les idées, d'un réel $x$ vérifiant $x^* < x$. Dans ce cas, on l'a vu, $x^*$ est le plus grand réel standard inférieur à $x$, et il n'y a pas de plus petit réel standard supérieur à $x$.

## 2.6. Les principes de permanence.

Les résultat de ce paragraphe sont des *principes de permanence,* c'est-à-dire des résultats permettant d'étendre une propriété vraie pour tous les objets standard à un objet non standard par idéalisation. D'autres exemples de principes de permanence sont traités en exercices (ex. 5 à 9), et d'autres seront vus dans les chapitres suivants.

Le résultat suivant est l'un des principes les plus utilisés en Analyse Non Standard :

**Théorème 6.** *(Principe de permanence de Cauchy) Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné dans lequel toute partie standard à deux éléments possède un majorant standard*[2]*, et $G$ une partie de $E$. Si $G$ contient tous les éléments standard de $E$, alors $G$ contient un élément infiniment grand.*

En effet, par récurrence externe sur le cardinal toute partie finie standard est majorée par un élément standard, et donc par un élément de $G$ ; l'axiome

---

[1] Prendre garde au fait que ces halos ne sont pas des objets mathématiques, c'est-à-dire des ensembles, mais ne constituent qu'un support intuitif et une commodité de langage : la phrase « $x$ appartient au halo de $x_0$ » ne désigne pas autre chose que le prédicat « $x$ est infiniment proche de $x_0$ », qui ne collectivise pas un ensemble.

[2] Cette condition est en particulier vérifiée (et c'est le cas le plus fréquent d'utilisation) si $E$ est *standard filtrant :* puisque $E$ est standard et que toute paire est majorée, par transfert toute paire standard est majorée par un élément standard.

d'idéalisation appliqué au prédicat « $x \in G$ et $(y \in E \Longrightarrow y \leqslant x)$ » donne alors le résultat. □

Ce résultat possède de nombreux avatars :

**Corollaire 1.** *Toute partie $X$ de $\mathbb{N}$ contenant tous les entiers standard contient un intervalle $[\![ 0, \omega ]\!]$ où $\omega$ est infiniment grand.*

Appliquer le principe de Cauchy à $\{n \in \mathbb{N} \mid [\![ 0, n ]\!] \subset X\}$.

**Corollaire 2.** *Toute partie de $\mathbb{R}^{+*}$ contenant tous les réels $> 0$ standard contient un réel i.g. et un réel i.p.*

Appliquer le principe de Cauchy dans $\mathbb{R}^{+*}$ et passer aux inverses.

**Corollaire 3.** *Toute partie $X$ de $\mathbb{R}^{+*}$ contenant tous les réels $> 0$ i.p. (resp. i.g.) contient un intervalle $]0, r]$ (resp. $[r, +\infty[$) où $r$ est standard.*

Considérer $\{r \in \mathbb{R}^{+*} \mid ]0, r] \not\subset X\}$ (resp. $\{r \in \mathbb{R}^{+*} \mid [r, +\infty[ \not\subset X\}$).

**Corollaire 4.** *(Lemme de Robinson) Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $u_n$ soit infiniment petit pour tout $n$ standard. Alors $(u_n)$ ne prend que des valeurs infiniment petites jusqu'à un entier $n$ infiniment grand.*

Appliquer le corollaire 1. à $\{n \in \mathbb{N}^* \mid |u_n| < 1/n\}$.

## 2.7. Exercices.

**1.** Montrer qu'il existe un ensemble non admissible.

**2.** Montrer par un contre-exemple que si une application $f$ possède une standardisée on n'a pas forcément $({}^s f)({}^s A) = {}^s(f(A))$.

**3.** Soit $E$ un ensemble standard, $a$ un élément standard de $E$, et $P$ un prédicat externe vérifiant $\forall^s x \in E\,, \exists^s y \in E\,, P(x, y)$. Montrer qu'il existe une suite standard $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $\forall^s n \in \mathbb{N}\,,\ P(u_n, u_{n+1})$ (Principe de construction de suites par récurrence externe). On pourra considérer ${}^s\{(x, y) \in E^2 \mid P(x, y)\}$.

**4.** Soit $E$ un ensemble ordonné, et $x$ et $y$ deux éléments de $E$. On dit que $x$ est infiniment proche de $y$ au sens de l'ordre (ce que l'on note $x \approx y$) si tout intervalle ouvert standard contenant $y$ contient $x$.

a) Montrer que la relation $\approx$ est réflexive et transitive.

b) On prend $E = \mathbb{R}$, muni de l'ordre usuel. Montrer que si $x_0$ est un réel standard, alors $x \approx x_0 \Longleftrightarrow x \simeq x_0$. Décrire les réels $x$ tels que $x \approx x_0$ dans le cas où $x_0$ est limité non standard, puis lorsque $x_0$ est infiniment grand. La relation $\approx$ est-elle symétrique ?

*(Principes de permanence, ex. 5 à 9.)*

**5.** Soient $I$, $J$, $E$ trois ensembles tels que $E$ contienne tous les couples standard de $I \times J$. Montrer qu'il existe une partie finie $I_1$ de $I$ contenant tous les éléments standard de $I$, et une partie finie $J_1$ de $J$ contenant tous les éléments standard de $J$, telles que $I_1 \times J_1 \subset E$ (Principe de débordement). Généralisation ?

**6.** Soient $E$ un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$ deux familles de parties de $E$ telles que $\forall^s (i,j) \in I \times J\,,\ X_i \subset Y_j$. Montrer qu'il existe une partie $Z$ de $E$ telle que $\forall^s (i,j) \in I \times J\,,\ X_i \subset Z \subset Y_j$ (Principe de Fehrele).

**7.** Soient $X$ un ensemble quelconque, et $f$ une application de $X$ dans $\mathbb{N}$ prenant des valeurs infiniment grandes sur les éléments standard de $X$. Montrer qu'il existe un entier infiniment grand $\omega$ tel que $\forall^s x \in X\,,\ \omega < f(x)$ (Principe de l'indice universel).

**8.** Soient $X$ un ensemble ordonné standard filtrant, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $X$ telle que pour tout $i \in I$ standard $E_i$ contienne tous les éléments standard de $X$. Montrer qu'il existe un élément infiniment grand $\omega$ de $X$ tel que $\forall^s i \in I\,, \omega \in E_i$ (Principe de Cauchy généralisé).

**9.** Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$ contenant tous les réels standard.

a) Montrer que pour tout réel $x_0$ standard et tout entier $n \geqslant 0$ standard, $E$ contient au moins $n$ points du halo de $x_0$.

b) Montrer qu'il existe un entier $\omega$ infiniment grand et un réel $\varepsilon > 0$ infiniment petit, tels que pour tout réel $x_0$ standard, $E$ contienne au moins $\omega$ points à distance de $x_0$ inférieure à $\varepsilon$.

*Les exercices qui suivent utilisent la théorie des ordinaux et des cardinaux.*

**10.** Soit $P(x)$ un prédicat quelconque.

a) Montrer que s'il existe un ordinal standard vérifiant $P$, alors il existe un plus petit ordinal standard vérifiant $P$.

b) (Principe de récurrence externe transfinie) Montrer que si pour tout ordinal standard $\alpha$, $\big(\forall^s \beta < \alpha\,,\ P(\beta)\big) \implies P(\alpha)$, alors $P(\alpha)$ est vérifiée pour tout ordinal standard $\alpha$.

c) Dans cette question le prédicat $P$ vérifie les conditions suivantes : (i) il existe un ordinal vérifiant $P$ ; (ii) Pour tout ordinal $\alpha$ vérifiant $P$, il existe un ordinal standard $\beta \leqslant \alpha$ vérifiant $P$. Montrer qu'il existe un plus petit ordinal vérifiant $P$.

**11.** Cet exercice généralise les résultats de l'exercice 10 du chap. 1.

Soit $X$ un ensemble standard et $c_0 = \mathrm{Card}(X)$ (éventuellement infini). Si $c$ est un cardinal, un élément de $x$ est dit *de rang au plus* $c$ s'il existe une partie standard de $X$ de cardinal au plus $c$ contenant $x$.

a) Quels sont les éléments de $X$ de rang au plus $c$ lorsque $c$ est un cardinal fini ?

b) Montrer que si $c$ est infini il existe une partie de $X$ de cardinal au plus $c$ contenant tous les éléments de $X$ de rang au plus $c$. Existe-t-il une partie de cardinal $c' < c$ qui les contienne ?

c) Soit $E$ une partie de $X$ et $c$ un cardinal infini. Montrer que tous les éléments de $E$ sont de rang au plus $c$ si, et seulement si, $E$ est inclus dans un ensemble standard de cardinal au plus $c$ (utiliser chap. 1, ex. 7).

d) Montrer que si $0 < c < c_0$, l'ensemble des éléments de $X$ de rang au plus $c$ n'existe pas.

e) Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un plus petit cardinal $c$ tel que $x$ soit de rang au plus $c$ (utiliser l'ex. 10 c)). Ce cardinal est appelé le rang de $x$ et noté $\operatorname{rg} x$.

f) Montrer que $\operatorname{rg} x$ est un cardinal standard. Montrer que pour tout cardinal standard infini $c \leqslant c_0$, il existe $x \in X$ tel que $\operatorname{rg} x = c$.

g) Montrer que pour tout cardinal standard infini $c < c_0$, l'ensemble des éléments $x$ de $X$ tels que $\operatorname{rg} x = c$ n'existe pas.

**12.** Soit $E$ un ensemble standard infini. Montrer qu'il existe une partie de $E$ de même cardinal que $E$ formée d'éléments deux à deux indiscernables (cf. chap. 1, ex. 6).

# CHAPITRE 3.
# THÉORIE NON STANDARD DES ESPACES TOPOLOGIQUES.

Pour un point $x$ d'un espace topologique on notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$.

## 3.1. Proximité, micro-voisinages, ombres, partie standard.

**Définition 1.** *Soit $X$ un espace topologique, et $x, y \in X$. On dit que $x$ est* infiniment proche *de $y$ (ce que l'on note $x \simeq y$) si tout voisinage standard de $y$ contient $x$.*

**Remarques**

1. Comme dans $\mathbb{R}$, il ne s'agit pas d'une véritable relation binaire au sens ensembliste, car on ne peut en général pas en collectiviser un graphe.

2. Ce n'est pas une relation d'équivalence : elle n'est en général ni transitive, ni symétrique. D'ailleurs, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, elle ne coïncide pas avec la relation de proximité métrique définie à la section précédente dans $\mathbb{R}$.[1] Il y a toutefois coïncidence --- et c'est, on le verra, la seule chose qui importe --- *si $y$ est standard.* (c'est immédiat, par transfert). Nous verrons un phénomène similaire à propos des espaces métriques.

La proposition suivante permet de récupérer la topologie à partir de la relation de proximité :

**Proposition 1.** *Soit $X$ un espace topologique standard et $U$ un sous-ensemble standard de $X$. Alors $U$ est ouvert si, et seulement si, pour tout point $x_0$ standard de $U$, tout point infiniment proche de $x_0$ est dans $U$.*

• Soit $U$ ouvert, $x_0 \in U$ standard, et $x \simeq x_0$. Alors $x$ est par définition dans tout voisinage standard de $x_0$ et donc en particulier dans $U$.

• Inversement, supposons $\forall^s x_0 \in U\,,\ \forall x \simeq x_0\,,\ x \in U$. Soit $x_0 \in U$ standard. On sait qu'il existe un ensemble fini de voisinages de $x_0$ contenant tous les voisinages standard. L'intersection est alors un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $\forall^s x \in V\,,\ x \simeq x_0$ et donc $V \subset U$. On a donc

$$\forall^s x_0 \in U\,,\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ V \subset U\,,$$

et par transfert c'est vrai pour tout $x_0 \in U$, donc $U$ est ouvert. □

**Définition 2.** *Soit $x$ un élément d'un espace topologique $X$, et $V$ un voisinage de $X$. On dit que $V$ est un* micro-voisinage *de $x$ si $V$ est inclus dans tout voisinage standard de $x$.*

---

[1] Voir à ce propos les exercices 1 et 2.

**Proposition 2.** *(Principe de permanence topologique de Cauchy) Soit $X$ un espace topologique, et $x \in X$. Tout ensemble $\mathcal{E}$ de parties de $X$ contenant tous les voisinages standard de $x$ contient un micro-voisinage de $x$.*

L'intersection de deux ensembles standard étant standard par transfert, il s'agit d'une simple paraphrase du principe de permanence de Cauchy appliqué à l'ensemble des voisinages de $x$ éléments de $\mathcal{E}$, muni de l'inclusion renversée.

**Définition 3.** *Soit $x$ un élément d'un espace topologique $X$. On appelle* ombre *de $x$ tout point standard $x_0$ de tel que $x \simeq x_0$. Le point $x$ est dit presque-standard (en abrégé p.s.) s'il possède une ombre.*

La proposition 1, après passage au complémentaire, donne immédiatement la caractérisation suivantes des fermés :

**Proposition 3. et définition 4.** *Si $X$ est standard et $F$ une partie standard de $X$, alors $F$ est fermé si, et seulement si, toute ombre d'un point de $F$ est dans $F$.*

**Proposition 4. et définition 5.** *Si $X$ est standard, alors $X$ est séparé si, et seulement si, tout point de $X$ possède au plus une ombre, c'est-à-dire si tout point $x$ presque standard a une ombre unique. On la note alors $x^*$ et on l'appelle la* partie standard *de $x$.*

• Supposons $X$ séparé, et $x \simeq x_1$, $x \simeq x_2$ avec $x_1$, $x_2$ standard. Alors :

$$\forall^s V_1 \in \mathcal{V}(x_1)\,,\ \forall^s V_2 \in \mathcal{V}(x_2)\,,\ V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$$

(car $x \in V_1 \cap V_2$). Par transfert, on a alors $\forall V_1 \in \mathcal{V}(x_1)\,,\ \forall V_2 \in \mathcal{V}(x_2)\,,\ V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, donc $x_1 = x_2$.

• Supposons $X$ non séparé. Il existe donc $x_1$ et $x_2$ non séparables par des voisinages. Par transfert, il existe de tels $x_1$, $x_2$ standard. Soit $V_i$ $(i = 1, 2)$ un micro-voisinage de $x_i$. Alors $V_1$ et $V_2$ se rencontrent, en un point $x$ de $X$ vérifiant $x \simeq x_1$ et $x \simeq x_2$. □

## 3.2. Compacité.

On a vu que si $X$ est un espace topologique standard l'unicité d'une ombre correspond à la séparation. L'existence d'une ombre correspond à la quasicompacité[1 2] :

**Proposition 5.** *Un espace topologique standard $X$ est quasicompact si, et seulement si, tout point de $X$ est presque-standard*[3]*.*

• Supposons tout d'abord par l'absurde que $X$ soit quasicompact et qu'il existe un point $x \in X$ non presque-standard, c'est-à-dire

$$\forall^s x_0\,,\ \exists^s V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ x \notin V\,.$$

[1] Un espace topologique est dit quasicompact si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini ; les compacts sont donc les quasicompacts séparés.

[2] de la même façon qu'en analyse classique, la séparation (resp. la quasicompacité) équivaut à l'unicité (resp. l'existence) de la limite d'un ultrafiltre.

[3] Le lecteur aura remarqué un propriété --- et non la moins étrange --- qui, on le verra, est récurrente en analyse non standard : les propriétés globales deviennent non seulement locales, mais. . . ponctuelles ! En quelque sorte, les points, qui jouent le rôle des ultrafiltres en analyse classique, contiennent de l'information sur la structure de l'espace.

Par transfert $\forall^s x_0\,,\ \forall^s V\ \in\ \mathcal{V}(x_0)\,,\ \exists^s U$ ouvert tel que $x_0 \in U \subset V$, et donc $\forall^s x_0\,,\ \exists^s U$ ouvert tel que $x_0 \in U$ et $x \notin U$.

Soit $\mathcal{U} = {}^s\{U$ ouvert de $X \mid x \notin U\}$. Alors $\mathcal{U}$ recouvre tous les points standard de $X$ donc par transfert recouvre $X$. Mais $X$ est quasicompact donc $\mathcal{U}$ admet un sous-recouvrement fini donc par transfert un sous-recouvrement fini standard $\mathcal{U}'$.

Mais $\mathcal{U}'$ est standard fini donc tous ses éléments sont standard donc ne contiennent pas $x$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{U}'$ constitue un recouvrement de $X$.

• Inversement, supposons que tout point de $X$ soit presque-standard. Par transfert il suffit de montrer que tout recouvrement ouvert standard $\mathcal{U}$ de $X$ admet un sous-recouvrement fini. Mais pour un tel recouvrement $\mathcal{U}$, on a, toujours par transfert,

$$\forall^s x_0 \in X\,,\ \exists^s U \in \mathcal{U}\,,\ x_0 \in U\,.$$

Il suffit alors de considérer $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ fini contenant tous les ouverts standard de $\mathcal{U}$ : puisque tout point est presque-standard $\mathcal{U}'$ est un recouvrement de $X$. □

A l'avenir nous ne rédigerons plus les démonstrations faciles.

**Corollaire.** *$\mathbb{R}$ est localement compact.*

En effet, il s'agit de montrer que tout segment est compact, et par transfert il suffit de traiter le cas d'un segment standard $S$. Mais par transfert les extrémités d'un tel segment sont standard, donc tout point de $S$ est limité, et donc presque standard (chap. 2, Théorème 5), et sa partie standard reste dans $S$ (chap. 2, Proposition 6).

**Autres exemples de preuves non standard**

• Tout fermé $F$ d'un compact $K$ est compact : par transfert on peut supposer $K$ et $F$ standard. Tout point $x$ de $F$ est p.s. donc possède une partie standard $x^*$. $F$ étant fermé standard on a $x^* \in F$, donc $x$ est p.s. dans $F$, donc $F$ est compact.

• Tout compact $K$ inclus dans un séparé $X$ est fermé dans $X$ : Tout point $x$ de $K$ est presque standard. Si $x_0$ est une ombre de $x$ alors, $X$ étant séparé, $x_0 = x^* \in K$, donc $K$ est fermé.

## 3.3. Limites, continuité.

**Définition 6.** *Soient $X, Y$ deux espaces topologiques, $A \subset X$, $f : A \longrightarrow Y$, $x_0 \in X$, $l \in Y$. On dit que*

- *$l$ est une $s$-limite en $x_0$ de $f$ si $\forall x \in X\,,\ x \simeq x_0 \Longrightarrow f(x) \simeq l$.*
- *$f$ est $s$-continue en $x_0$ (lorsque $x_0 \in A$) si $\forall x \in A\,,\ x \simeq x_0 \Longrightarrow f(x) \simeq f(x_0)$.*

**Remarques**

1. Si $X$, $Y$, $A$, $x_0$, $f$, $l$ sont standard et $x_0$ adhérent à $A$ (ce qui s'écrit $\exists x \simeq x_0\,,\ x \in A$) alors $l$ est unique. On l'appelle *la* $s$-limite en $x_0$ de $f$ et on note

$$l = s\text{-}\lim_{x_0} f\,.$$

2. Nous allons voir ci-après que sous des conditions standard les notions de $s$-limite et de $s$-continuité coïncident avec les notions classiques de limite et continuité. Ce n'est pas le cas si les conditions ne sont pas standard, comme le prouvent les exemples qui suivent :

**Exemples**

1. Soit $\varepsilon > 0$ i.p. La fonction $\varepsilon\chi_{\mathbb{Q}}$ est $s$-continue sur $\mathbb{R}$ mais discontinue partout.

2. Soit $\varepsilon > 0$ i.p. et $f$ la fonction réelle définie par

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f(x) = 0 \text{ si } x \leqslant -\varepsilon \\ f(x) = 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ f \text{ est affine sur } [-\varepsilon, 0]\,. \end{cases}$$

Alors $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas $s$-continue en $0$.

3. La fonction $x \longmapsto \omega x$ où $\omega$ est i.g. est continue sur $\mathbb{R}$ mais $s$-discontinue partout.

Voici maintenant quelques traductions en analyse non standard de notions classiques. Les démonstrations sont faciles et omises.

**Proposition 6.** *Soient $E$ un ensemble, $X$ un espace topologique, $Y$ un espace topologique séparé, $A \subset X$, $f : A \longrightarrow Y$, $x_0 \in X$ adhérent à $A$, $l \in Y$, $(x_n)$ une suite à valeurs dans $Y$, $(f_n)$ une suite d'applications de $E$ dans $Y$, $g$ une application de $E$ dans $Y$. On suppose $E$, $X$, $Y$, $A$, $f$, $x_0$, $l$, $(x_n)$, $(f_n)$, $g$ standard. Alors :*

1. $l = \lim\limits_{x_0} f \iff l = s\text{-}\lim\limits_{x_0} f$ ;
2. $l = \lim(x_n) \iff \forall n$ *i.g.*, $x_n \simeq l$ ;
3. $(x_n)$ *possède une suite extraite qui cv. vers* $l \iff \exists n$ *i.g.*, $x_n \simeq l$ ;
4. $(x_n)$ *possède une suite extraite cv.* $\iff \exists n$ *i.g. tel que* $x_n$ *soit p.s.* ;
5. $f$ *est continue en* $x_0 \iff f$ *est $s$-continue en* $x_0$ *(ici* $x_0 \in A$*)* ;
6. $f$ *est continue sur* $A \iff f$ *est $s$-continue en tout point standard de* $A$ ;
7. $(f_n)$ *cv. vers* $g$ *simplement sur* $E \iff \forall^s x \in E$, $\forall n$ *i.g.*, $f_n(x) \simeq g(x)$.

On en déduit de manière immédiate, par exemple, que l'image continue d'un compact dans un séparé est compacte.

**Observation :** On commence à entrevoir que dans un énoncé donnant l'équivalence entre une notion classique et sa traduction en analyse non standard, il faut imposer que tous les paramètres soient standard pour pouvoir appliquer l'axiome de transfert. Mais cela n'est pas gênant, puisque dans l'utilisation de cet énoncé pour démontrer un théorème classique, on pourra supposer par transfert que toutes les conditions sont standard, c'est-à-dire remplacer tous les $\forall$ débutant l'énoncé du théorème par des $\forall^s$. Par exemple considérons un énoncé classique, au hasard, le théorème de Brouwer. Il commence par « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout e.v.n. $E$ de dimension $n$, pour tout convexe compact $K$ de $E$, pour toute application continue $f$ de $K$ dans lui-même, etc. . . ». Par transfert on peut remplacer le premier $\forall$ par $\forall^s$, puis de proche en proche on fait de même pour tous les $\forall$.

**Remarque :** Le point 6. de la proposition ci-dessus peut s'énoncer comme une propriété de commutation avec la partie standard : une application $f$ d'un espace topologique $X$ dans un espace topologique séparé $Y$ (avec $X$, $Y$, $f$ standard) est continue s.si pour tout point $x \in X$ p.s., $f(x)$ est p.s. et $f(x^*) = f(x)^*$.

La comparaison de deux topologies se fait de façon non standard en comparant les relations de proximité :

**Proposition 7.** *Soit $X$ un ensemble standard, et $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies standard sur $X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ ;*

*(ii)* $\forall^x x_0 \in X\,,\ \forall x \in X\,,\ x \underset{\mathcal{T}_1}{\simeq} x_0 \Longrightarrow x \underset{\mathcal{T}_2}{\simeq} x_0$.

En effet, (ii) est équivalente à la $s$-continuité, et donc à la continuité, de

$$\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)\,,$$

ce qui équivaut classiquement à (i). □

## 3.4. Ombre d'une partie.

Soit $X$ un espace topologique. Si $X$ n'est pas standard séparé, une ombre d'un point n'est plus unique mais on pourrait être tenté d'appeler *ombre* de $x$ *l'ensemble* des points standard $x_0$ tels que $x \simeq x_0$. Cet ensemble n'existe pas, mais en revanche on peut poser

$$\widetilde{x} = {}^s\{x_0 \in X \mid x \simeq x_0\}\,.$$

Par transfert, on a alors immédiatement :
- Si $X$ est standard, $X$ est séparé $\Longleftrightarrow \forall x \in X\,,\ \mathrm{Card}(\widetilde{x}) \leqslant 1$ ;
- $x$ est p.s. $\Longleftrightarrow \widetilde{x} \neq \varnothing$.

On appelle encore par abus $\widetilde{x}$ l'ombre de $x$. Cette notion d'ombre s'étend à une partie de $X$ :

**Proposition 8. et définition 7.** *Soit $A$ une partie d'un espace topologique $X$. On appelle* ombre *de $A$ l'ensemble*

$$\widetilde{A} = {}^s\{x \in X \mid \exists y \in A\,,\ y \simeq x\}\,.$$

*C'est également l'ensemble*

$${}^s\{x \in X \mid \forall^s V \in \mathcal{V}(x)\,,\ V \cap A \neq \varnothing\}\,.$$

Le premier ensemble est de façon évidente contenu dans le premier (il suffit raisonner sur les éléments standard par transfert). Inversement, toujours par transfert, il reste à montrer que tout point $x$ standard du second ensemble est dans le premier. Par définition, tout voisinage standard de $x$ rencontre $A$. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des voisinages de $x$ qui rencontrent $A$. Comme $\mathcal{V}$ contient tous les voisinages standard de $X$, d'après le principe de permanence topologique il contient un micro-voisinage de $x$, lequel rencontre donc $A$ en un point infiniment proche de $x$. □

**Proposition 9.** *Soit $X$ un espace topologique standard.*

*1. Pour toute partie $A$ de $X$, $\widetilde{A}$ est fermé.*

*2. Si $A$ est standard alors $\widetilde{A}$ coïncide avec l'adhérence $\overline{A}$ de $A$.*

Nous allons d'abord montrer le point 2., et ensuite que pour $A$ quelconque $\widetilde{\widetilde{A}} \subset \widetilde{A}$, ce qui prouvera le point 1. puisqu'alors, du fait que $\widetilde{A}$ est standard,

$$\overline{\widetilde{A}} = \widetilde{\widetilde{A}} \subset \widetilde{A}\,,$$

et donc $\widetilde{A} = \overline{\widetilde{A}}$ est un fermé.

• Pour le point 2 : supposons $A$ standard. $\widetilde{A}$ et $\overline{A}$ étant standard par transfert il suffit de montrer qu'ils ont les mêmes éléments standard. Soit donc $x \in X$ standard. Si $x \in \widetilde{A}$, tout voisinage standard de $x$ rencontre $A$ ; mais alors par transfert tout voisinage de $x$ rencontre $A$ et donc $x \in \overline{A}$. Inversement, si $x \in \overline{A}$ est standard alors en considérant un micro-voisinage de $x$, on a $x \in \widetilde{A}$.

• Supposons maintenant $A$ quelconque. Soit $x \in \widetilde{\widetilde{A}}$ standard. Soit $V$ un voisinage standard de $x$. Par transfert $U = \mathring{V}$ est standard. Mais $x \in \widetilde{\widetilde{A}}$ donc $U$ rencontre $\widetilde{A}$, et par transfert le rencontre en un point standard $y$. Dans ce cas, $y$ étant dans $\widetilde{A}$, l'ouvert standard $U$, voisinage standard de $y$, rencontre $A$, donc $V$ aussi, et donc $x \in \widetilde{A}$. Tout élément standard de $\widetilde{\widetilde{A}}$ est donc dans $\widetilde{A}$, et par transfert $\widetilde{\widetilde{A}} \subset \widetilde{A}$. □

**Remarque :** En général le fermé $\widetilde{A}$ n'a aucune raison de contenir $A$ ou d'être inclus dans $\overline{A}$. Pour le voir il suffit de considérer un singleton : pour $x$ presque-standard on a (dans le cas $X$ séparé) $\widetilde{\{x\}} = \{x^*\}$.

**Exemples**

1. L'ombre d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ où $a$ et $b$ sont $> 0$ i.p. (resp. i.g.) est réduite à $\{0\}$ (resp. vide) ;

2. Plus généralement, l'ombre d'un intervalle borné d'extrémités $a, b \in \mathbb{R}$ limités est le segment $[a^*, b^*]$.

## 3.5. Topologie produit, convergence simple, ombre d'une application.

Les démonstrations de toutes les propositions de cette section sont faciles et, pour la plupart, laissées au lecteur.

**Proposition 10.** *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille standard d'espaces topologiques, et $(x_i)$, $(y_i)$ deux éléments du produit cartésien $\prod_{i\in I} X_i$. On suppose que la famille $(y_i)$ est standard. Alors :*

$$(x_i) \simeq (y_i) \text{ pour la topologie produit } \iff \forall^s i \in I\,,\ x_i \simeq y_i\,.$$

Dans le cas où les $X_i$ sont tous égaux ce résultat devient :

**Proposition 11.** *Soient $E$ un ensemble, $Y$ un espace topologique, et $f, f_0 \in Y^E$. On suppose $E$, $Y$, et $f_0$ standard. Alors :*

$$f \simeq f_0 \text{ pour la topologie de la cvce. simple } \iff \forall^s x \in E\,,\ f(x) \simeq f_0(x)\,.$$

En particulier si $f \simeq f_0$ avec $f_0$ standard alors pour tout $x \in E$ standard $f(x)$ est presque-standard.

Inversement, considérons maintenant une application $f$ de $E$ dans $Y$ telle que pour tout $x \in E$ standard $f(x)$ soit presque-standard. On ne peut pas pour autant considérer *l'application* (au sens ensembliste) qui à $x$ standard fait correspondre $f(x)^*$. On a néanmoins le résultat suivant :

**Proposition 12. et définition 8.** *Soient $E$ un ensemble standard, $Y$ un espace topologique standard séparé, et $f$ une application de $E$ dans $Y$ telle que pour tout élément $x$ standard de $E$, $f(x)$ soit presque-standard. Il existe alors une unique application standard $f_0$ de $E$ dans $Y$ telle que $\forall^s x \in E\,,\ f(x) \simeq f_0(x)$.*

*Cette application est appelée* l'ombre *de $f$ et on la note $\widetilde{f}$.*

Il suffit d'appliquer le principe de construction au prédicat $f(x) \simeq y$. □

**Exemples**

1. Soit $f$ une fonction réelle bornée standard, $\varepsilon \simeq 0$, et $g = \varepsilon f$. L'ombre de $f$ est la fonction nulle.

2. Soit $f$ la fonction réelle définie dans l'exemple 2 de la section 3.3. L'ombre de $f$ est l'échelon de Heaviside $\chi_{\mathbb{R}^+}$.

Les propriétés suivantes sont de simples paraphrases de la définition précédente :

**Proposition 13.** *Soit $f : E \longrightarrow Y$ possédant une ombre.*

*1. $\forall^s x \in E\,,\ \widetilde{f}(x) = f(x)^*$.*

*2. $\widetilde{f}$ est l'unique application standard $f_0$ de $E$ dans $Y$ telle que $f \simeq f_0$ pour la topologie de la convergence simple.*

**Remarque :** La convergence simple se comportant très mal vis-à-vis de la régularité, on se doute bien que $\widetilde{f}$ peut tout perdre de la régularité de $f$. Nous verrons au début du chapitre « théorie non standard de la mesure » que $f$ peut être $C^\infty$ et $\widetilde{f}$ non Lebesgue-mesurable ! En revanche, on verra également dans le § 4.4. comment une certaine régularité de $f$ *au sens de l'analyse non standard* se traduit par une régularité classique de l'ombre.

La proposition suivante est l'analogue non standard de la caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts ou de fermés.

**Proposition 14.** *Soient $X$ un espace topologique standard, $Y$ un espace topologique standard séparé, et $f : X \longrightarrow Y$ possédant une ombre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $f$ est $s$-continue en tout point standard de $X$.*

*(ii) Pour toute partie $A$ de $Y$, $\widetilde{f^{-1}(A)} = (\widetilde{f})^{-1}(\widetilde{A})$.*

*(iii) Pour tout fermé standard $A$ de $Y$, $\widetilde{f^{-1}(A)} = (\widetilde{f})^{-1}(A)$.*

Dans le cas où l'espace de départ est topologique, le graphe de l'ombre n'est en général pas confondu avec l'ombre du graphe. Cette dernière peut même ne pas être un graphe fonctionnel. Par exemple, le graphe de la fonction $f : x \longmapsto sin(\omega x)$ prolongée par $f(0) = 0$, où $\omega$ est un réel infiniment grand, est $\mathbb{R} \times [-1, 1]$[1].

On a précisément le résultat suivant :

**Proposition 15.** *Soient $X$ un espace topologique standard, $Y$ un espace topologique standard séparé, et $f : X \longrightarrow Y$ possédant une ombre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) L'ombre du graphe de $f$ est un graphe fonctionnel.*

*(i) L'ombre du graphe de $f$ est confondu avec le graphe de l'ombre de $f$.*

La proposition suivante est l'analogue non standard de « toute application continue à valeurs dans un espace séparé a un graphe fermé ».

**Proposition 16.** *Soient $X$ un espace topologique standard, $Y$ un espace topologique standard séparé, et $f : X \longrightarrow Y$ possédant une ombre. Une condition suffisante pour que l'ombre du graphe de $f$ soit un graphe fonctionnel est que $f$ soit $s$-continue en tout point standard de $X$.*

**Remarque :** Si $f$ va d'un espace topologique dans l'espace discret $\{0, 1\}$, les points de l'image de $f$ étant standard la standardisée ${}^{s}f$ existe et coïncide avec l'ombre $\widetilde{f}$. Par conséquent, si $f$ est la fonction caractéristique d'une partie $A$ d'un ensemble $X$ standard, $\widetilde{f}$ est la fonction caractéristique de ${}^{s}A$ et non pas celle de $\widetilde{A}$. Par exemple, si $f$ est la fonction caractéristique de $A = [\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ i.p., $\widetilde{f}$ est la fonction caractéristique de ${}^{s}A = \mathbb{R}^{+*}$ alors que $\widetilde{A} = \mathbb{R}^{+}$.

Bien évidemment, le principe de construction généralisé avec choix permet d'étendre la proposition 12 au cadre plus général des espaces produits :

**Proposition 17.** *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille standard d'espaces topologiques et $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tel que pour tout $i$ standard $x_i$ soit presque-standard. Il existe alors une famille standard $(y_i) \in \prod_{i\in I} X_i$ telle que*

$$\forall^{s} i \in I\,,\ x_i \simeq y_i\,.$$

On a alors $(x_i) \simeq (y_i)$ pour la topologie produit.

**Corollaire 1.** *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille standard d'espaces topologiques. Une famille $(x_i) \in \prod_{i\in I} X_i$ est presque-standard pour la topologie produit si, et seulement si, $\forall^{s} i \in I$, $x_i$ est p.s. dans $X_i$.*

Il en découle la démonstration non standard du théorème de Tychonov :

[1] Quant à l'ombre de $f$, elle est impossible à expliciter : pour certaines valeurs de $\omega$, elle n'est précisément pas Lebesgue-mesurable, cf. le chapitre « théorie non standard de la mesure ».

**Corollaire 2 : Théorème de Tychonov.** *Tout produit d'espaces compacts est compact.*

La séparation est facile. Pour la quasicompacité on peut considérer par transfert le cas d'une famille *standard* $(X_i)$ d'espaces topologiques compacts. Etant donnée une famille $(x_i)$ du produit, pour $i$ standard $X_i$ est compact et standard par transfert, donc $x_i$ est presque-standard. Le résultat découle alors du corollaire 1.

## 3.6. Exercices.

**1.** Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $\simeq$ la relation de proximité associée.

a) Montrer que la relation $\simeq$ est réflexive.

b) Dans cette question $(E, \mathcal{T})$ est standard. Montrer que $x \simeq y$ si, et seulement si, tout ouvert standard contenant $y$ contient $x$. En déduire que la relation $\simeq$ est transitive.

c) Dans cette question $\omega$ désigne un entier infiniment grand, et on prend $E = \mathbb{N}$, muni de la topologie dont les ouverts sont les trois ensembles $\varnothing$, $\mathbb{N}$, et $[\![\omega, +\infty[\![$. Montrer que les voisinages standard de $\omega$ sont les complémentaires des parties finies standard. Quels sont les points $x$ tels que $x \simeq \omega$ ? tels que $x \simeq \omega - 1$ ? La relation $\simeq$ est-elle transitive ?

d) Dans cette question on prend $E = \mathbb{R}$, muni de sa topologie usuelle. Montrer que la relation de proximité topologique n'est pas symétrique, et que, par conséquent, elle ne coïncide pas avec la relation de proximité métrique dans $\mathbb{R}$ définie au chapitre 2 (considérer un réel $\varepsilon > 0$ infiniment petit).

**2.** Dans cet exercice $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle. Montrer que si $\omega$ est un réel infiniment grand, il existe une partie non majorée de $\mathbb{R}$ dont tous les éléments sont indiscernables de $\omega$ (chap. 1 ex. 6), et par conséquent topologiquement infiniment proches de $\omega$.

**3.** Dans cet exercice $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle.

a) Soit $\omega$ un entier naturel infiniment grand. Le réel $\omega' = \omega + \dfrac{1}{\omega}$ est-il infiniment proche de $\omega$ au sens métrique ? au sens topologique ?

b) Soit $\omega'$ un entier $\omega$-inaccessible (chap. 1 ex. 4). Montrer que $\omega + \dfrac{1}{\omega'}$ est infiniment proche de $\omega$ au sens topologique.

**4.** Soit $X$ un espace topologique standard, $E$ une partie standard de $X$, et $x_0$ et $x$ deux points de $E$. Montrer que $x \simeq x_0$ pour la topologie induite sur $E$ si, et seulement si, $x \simeq x_0$ dans $X$. Donner des contre-exemples dans les cas où $X$ ou $E$ n'est pas standard.

*(Principes de permanence topologiques, ex. 5 à 8)*

**5.** Soit $X$ un espace topologique, $x_0 \in X$, et $E \subset X$.

a) Montrer que si $\forall x \in E\,,\ x \simeq x_0$, alors $E$ est inclus dans un micro-voisinage de $x_0$.

b) Montrer que si $\forall x \simeq x_0\,,\ x \in E$, alors $E$ contient un voisinage standard de $x_0$.

c) Montrer que si $E$ rencontre tous les voisinages standard de $x_0$, alors $E$ rencontre un micro-voisinage de $x_0$.

**6.** Soit $X$ un espace topologique, $x_0 \in X$, et $(u_n)$ une suite à valeurs dans $X$ telle que $\forall^s n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \simeq x_0$. Montrer que $(u_n)$ prend des valeurs infiniment proches de $x_0$ jusqu'à un indice $n$ infiniment grand (Lemme de Robinson séquentiel topologique). Montrer qu'il existe un micro-voisinage $V$ de $x_0$ tel que $u_n \in V$ jusqu'à un indice $n$ infiniment grand.

**7.** Soient $Y$ un espace topologique, $y_0 \in Y$, et $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $Y$ telle que $\forall x$ limité$\,,\ f(x) \simeq y_0$. Montrer qu'il existe un réel infiniment grand $\omega$ tel que $|x| \leqslant \omega \Longrightarrow f(x) \simeq y_0$ (Lemme de Robinson pour les fonctions de variable réelle). Montrer qu'il existe un réel infiniment grand $\omega$ et un micro-voisinage $V$ de $y_0$ tel que $f([-\omega, \omega]) \subset V$.

**8.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, et $f$ une application de $X$ dans $Y$ telle que $\forall x \not\simeq x_0\,,\ f(x) \simeq y_0$. Montrer qu'il existe un micro-voisinage $V$ de $x_0$ tel que $\forall x \notin V\,,\ f(x) \simeq y_0$ (Lemme de Robinson topologique). Montrer qu'il existe un micro-voisinage $V$ de $x_0$ et un micro-voisinage $V'$ de $y_0$ tel que $f(X \setminus V) \subset V'$.

**9.** Soit $X$ un espace topologique standard non quasicompact. Montrer que l'ensemble des points presque-standard de $X$ n'existe pas.

# CHAPITRE 4.
# THÉORIE NON STANDARD DES ESPACES MÉTRIQUES.

## 4.1. Généralités.

**Définition 1.** *Soient $(X, d)$ un espace métrique, et $x, y \in X$. On dit que $x$* est infiniment proche de $y$ au sens métrique *(ce que l'on note $x \underset{d}{\simeq} y$) si le réel $d(x, y)$ est infiniment petit.*

**Remarque :** Cette relation de proximité métrique ne coïncide en général pas avec la relation de proximité topologique $\simeq$ pour la topologie induite par la distance (et d'ailleurs la proximité métrique est bien une relation d'équivalence). Néanmoins, si l'espace $X$ et le point $x_0$ sont standard alors $x \simeq x_0 \iff x \underset{d}{\simeq} x_0$. (C'est immédiat, par transfert). Il en résulte que toutes les définitions et propositions énoncées précédemment restent valables pour la relation $\underset{d}{\simeq}$. (Par exemple, si $X$ est standard, $x$ est p.s. au sens métrique si, et seulement si, il l'est au sens topologique). Ainsi, dans toute la suite, on ne considèrera plus que la relation $\underset{d}{\simeq}$, que l'on notera encore $\simeq$ par abus, et toutes les notions (p.s., $s$-continuité, *etc* ) devront être comprises : au sens métrique.

**Définition 2.** *Soient $X$ un espace métrique, $x$ un point de $X$ et $A$ une partie de $X$. On dit que*

- *$x$ est* limité *si $\exists^s y \in X$ , $\exists^s d > 0$ , $d(x, y) < d$ ;*
- *$x$ est* quasistandard *(en abrégé q.s.) si $\forall^s d > 0$ , $\exists^s y \in X$ , $d(x, y) \leqslant d$ ;*
- *$A$ est* microscopique *(resp.* gigantesque*) si $\operatorname{diam}(A)$ est infiniment petit (resp. grand).*

On a de manière immédiate : $x$ p.s. $\Longrightarrow$ $x$ q.s. $\Longrightarrow$ $x$ limité.

**Remarques :**

1. Si $X$ est standard, on peut remplacer, dans la première définition, $\exists^s y$ par $\forall^s y$ par inégalité triangulaire, puisque la distance entre deux points standard est standard par transfert.

2. On vérifie aisément que les réels limités, pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, sont les réels limités pour l'ordre, tels qu'ils ont été définis au § 2.4.

## 4.2. Traduction des notions classiques.

Les démonstrations des propositions suivantes ne posent aucune difficulté et sont laissées au lecteur (voir p. ex. [D]).

**Proposition 1.** *Soient $E$ un ensemble, $X$ un espace métrique, $f : E \longrightarrow X$, $(x_n)$ une suite à valeurs dans $X$, $(f_n)$ une suite d'applications de $E$ dans $X$, $H$ une partie de $X^E$. On suppose $E$, $X$, $f$, $(x_n)$, $(f_n)$ et $H$ standard. Alors :*

*1. $X$ est borné $\Longleftrightarrow$ tout point de $X$ est limité ;*

*2. $f$ est bornée $\Longleftrightarrow$ l'image de tout point de $E$ est limitée ;*

*3. $X$ est précompact $\Longleftrightarrow$ tout point de $X$ est quasistandard ;*

*4. Les boules de $X$ sont précompactes (i.e. les précompacts sont les parties bornées) $\Longleftrightarrow$ tout point limité est q.s. ;*

*5. Les boules fermées de $X$ sont compactes (i.e. les compacts sont les fermés bornés) $\Longleftrightarrow$ tout point q.s. est p.s. ;*

*6. $X$ est complet $\Longleftrightarrow$ tout point q.s. est p.s. ;*

*7. $(x_n)$ est de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $\forall n, m$ i.g. , $x_n \simeq x_m$.*

*8. $H$ est uniformément borné $\Longleftrightarrow$ $\forall f \in H,\ \ \forall x \in E,\ \ f(x)$ est limité.*

*9. $(f_n)$ cv. vers $f$ uniformément sur $E$ $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in E, \quad \forall n$ i.g. , $f_n(x) \simeq f(x)$. (Comparer avec la convergence simple, section 3.3.).*

**Remarques**

1. La traduction non standard de la convergence uniforme dans le point 9. peut d'ailleurs s'exprimer de façon plus synthétique. On a vu (chap. 3, prop. 11) que, si les espaces et $f_0$ sont standard, la condition « $f(x) \simeq f_0(x)$ pour tout $x$ standard » est équivalente à la proximité de $f$ par rapport à $f_0$ pour la topologie de la convergence simple. Si on remplace « pour tout $x$ standard » par « pour tout $x$ » on obtient la convergence uniforme. Autrement dit : $f$ est presque-standard pour la topologie uniforme s.si elle possède une ombre et $f(x) \simeq \widetilde{f}(x)$ pour tout $x \in E$.

2. Certains résultats classiques de topologie métrique deviennent des trivialités compte tenu du « dictionnaire » fourni par la proposition 1., comme par exemple : toute partie complète est fermée, tout partie fermée d'un complet est complète, les compacts sont les précompacts complets. . .

3. Traitons par exemple de façon non standard la propriété « toute suite de Cauchy est bornée ». Soit $X$ métrique et $(x_n)$ une suite de Cauchy dans $X$. Par transfert on peut supposer $X$ et $(x_n)$ standard. Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n$ est limité. Si $n$ est standard c'est trivial puisque $x_n$ est déjà standard. Si $n$ est infiniment grand considérons

$$A = \{p \in \mathbb{N} \mid d(x_p, x_n) \leqslant 1\} .$$

$A$ contient tous les entiers infiniments grands (puisque pour $p$ i.g. $x_p \simeq x_n$), et donc un entier standard $p$ par principe de permanence. Alors $x_p$ est standard, et donc $x_n$ est limité.

4. Parmi les preuves non standard de résultats classiques de topologie métrique, il en est une qui nécessite un peu de soin : c'est la conservation de la continuité par limite uniforme. Voici un bon exemple d'application des principes de permanence. En effet, on aurait envie d'écrire, lorsque $E$ est topologique et $E$, $X$, et $x_0$ sont standard, que si $f$ continue en $x_0$ possède une ombre $f_0$ et que $f(x) \simeq f_0(x)$ pour tout $x$ :

$$\forall x \simeq x_0\,,\ f_0(x) \simeq f(x) \simeq f(x_0) \simeq f_0(x_0)\,.$$

Mais ce raisonnement n'est a priori pas valide, car $f$ n'étant pas standard la continuité n'a aucune raison d'entraîner la $s$-continuité. Cependant le principe de Cauchy est là pour nous sauver : soient $(f_n)$ une suite (supposée standard par transfert) de fonctions, continues en $x_0$ (standard), et $x \simeq x_0$ fixé. Pour $n$ standard, $f_n$ étant standard elle est $s$-continue en $x_0$ donc $d((f_n(x), f_n(x_0)) \simeq 0$, et d'après le lemme de Robinson (§ 2.6. Cor. 4) c'est vrai pour un certain indice $n$ i.g.

5. On peut évidemment se passer de suites, ce qui donne la démonstration « propre » (même si elle n'est pas plus simple !) suivante : Soient $E$ un espace topologique, $X$ un espace métrique, $x_0 \in E$, et $f_0$ dans l'adhérence, pour la topologie de la convergence uniforme, de l'ensemble des fonctions de $E$ dans $X$ continues en $x_0$. Par transfert on peut supposer $E$, $X$, $x_0$, $f_0$ standard. Il existe donc $f$ continue en $x_0$ telle que $f(x) \simeq f_0(x)$ pour tout $x \in E$. Comme on l'a dit, on ne peut pas conclure à la $s$-continuité de $f$ en $x_0$.

Mais, pour $x \simeq x_0$ fixé, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f$ continue en $x_0$ telle que $d(f, f_0) \leqslant \varepsilon$, et par transfert si $\varepsilon$ est standard il existe une telle application $f$ standard, qui, du coup, est $s$-continue en $x_0$. On a donc :

$$\forall^s \varepsilon > 0\,,\ \exists f \in X^E\,,\ d(f, f_0) \leqslant \varepsilon \text{ et } d(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon\,.$$

D'après le principe de Cauchy, c'est vrai pour un certain $\varepsilon > 0$ infiniment petit, ce qui rend cette fois licite l'écriture

$$f_0(x) \simeq f(x) \simeq f(x_0) \simeq f_0(x_0)\,.$$

6. Il ressort de ces exemples que certains résultats sont moins commodes à traiter par l'analyse non standard « pure » que de façon classique. Ce phénomène a une signification simple : le bon point de vue consiste sans doute, plus qu'à prouver des résultats classiques de façon non standard, *à énoncer directement des analogues non standard de ces résultats,* en « oubliant » la formulation classique. Ainsi, du point de vue non standard la « bonne » notion est celle de $s$-continuité, qui remplace la continuité. *L'analogue* non standard de « toute limite uniforme de fonctions continues est continue » est : si $f$ $s$-continue en $x_0$ a une ombre $f_0$ continue en $x_0$ et si $f(x) \simeq f_0(x)$ pour tout $x$, alors

$$\forall x \simeq x_0\,,\ f_0(x) \simeq f(x) \simeq f(x_0) \simeq f_0(x_0)\,.$$

Voici maintenant encore quelques traductions de notions classiques en analyse non standard, cette fois dans le cas où l'ensemble de départ est topologique :

**Proposition 2.** *Soient $X$ un espace topologique, $Y$ un espace métrique, $x_0 \in X$, $H$ une partie de $Y^X$. On suppose $X$, $Y$, $x_0$, et $H$ standard. Alors :*

1. *$H$ est équicontinu en $x_0 \iff \forall f \in H,\ \ f$ est $s$-continue en $x_0$ ;*
2. *$H$ est équicontinu sur $X \iff \forall f \in H,\ \ f$ est $s$-continue en tout point standard.*

Encore quelques traductions dans le cas où l'espace de départ est lui aussi métrique :

**Proposition 3.** *Soient $X$, $Y$ deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$, $H$ une partie de $Y^X$. On suppose $X$, $Y$, $f$, et $H$ standard. Alors :*

*1. $f$ est uniformément continue sur $X \Longleftrightarrow f$ est $s$-continue en tout point de $X$. (Comparer avec la caractérisation de la continuité simple, section 3.3.) ;*

*2. $H$ est uniformément équicontinu sur $X \Longleftrightarrow \forall f \in H, \quad f$ est $s$-continue en tout point ;*

*3. $f$ est compacte*[1] *$\Longleftrightarrow f$ envoie tout point limité sur un point p.s.*

Le théorème de Heine, par exemple, en découle quasi-trivialement.

Comme dans le cas topologique on compare des distances en comparant les relations de proximité :

**Proposition 4.** *Soient $X$ un ensemble standard, et $d_1$ et $d_2$ deux distances standard sur $X$.*

*1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $d_1$ est topologiquement plus fine que $d_2$ ;*

*(ii) $\forall^x x_0 \in X \,,\, \forall x \in X \,,\, x \underset{d_1}{\simeq} x_0 \Longrightarrow x \underset{d_2}{\simeq} x_0$.*

*2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(iii) $d_1$ est métriquement plus fine que $d_2$ ;*

*(iv) $\forall x, y \in X \,,\, x \underset{d_1}{\simeq} y \Longrightarrow x \underset{d_2}{\simeq} y$.*

En effet, (ii) équivaut à la $s$-continuité en tout point standard, et donc à la continuité, de

$$\mathrm{id} : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)\,,$$

et (iv) à sa $s$-continuité en tout point, c'est-à-dire à sa continuité uniforme. □

## 4.3. Théorèmes d'Ascoli.

**Remarque préliminaire.**

Il va sans dire que tout ce que nous venons de dire dans ce chapitre est transposable tel quel aux *espaces uniformes*[2], en définissant $x \simeq y$ par « tout entourage standard contient $(x, y)$ ». Là encore, la relation $\forall x, y \,,\, x \underset{U_1}{\simeq} y \Longrightarrow x \underset{U_2}{\simeq} y$ équivaut au fait que la structure uniforme $U_1$ est plus fine que $U_2$, alors qu'en se restreignant aux $y$ standard on ne compare que les structures topologiques sous-jacentes. Dans le cas d'espaces fonctionnels avec espace d'arrivée uniforme, la relation $\forall^s x \,,\; f(x) \simeq g(x)$ est la relation de proximité de la structure uniforme de la convergence simple (structure uniforme produit), alors que la relation $\forall x \,,\; f(x) \simeq g(x)$ est celle de la structure uniforme de la convergence uniforme.

Nous allons maintenant appliquer tout ce qui précède à la démonstration des théorèmes d'Ascoli par l'analyse non standard.

---

[1] i.e. l'image de tout borné est relativement compacte ; ici $Y$ n'a pas besoin d'être métrique.

[2] structure intermédiaire entre les structures métrique et topologique, dans laquelle se généralisent bon nombre de notions et résultats métriques, cf. par exemple [B].

**Théorèmes d'Ascoli :** *Soient $X$ un espace topologique, $Y$ un espace métrique, $x_0 \in X$, et $H$ une partie de $Y^X$.*

*1. Si $H$ est équicontinue en $x_0$ (resp. uniformément équicontinue sur $X$ ; dans ce cas $X$ est supposé métrique) son adhérence $\overline{H}$ pour la convergence simple l'est aussi.*

*2. Si $H$ est équicontinue sur $X$ les structures uniformes de la convergence simple et de la convergence uniforme sur tout compact coïncident.*

*3. Si $H$ est équicontinue sur $X$ et $Y$ compact alors $H$ est relativement compact.*

Par transfert, on peut supposer $X, Y, H, x_0$ standard. Par transfert $\overline{H}$ est alors standard.

1. L'équicontinuité de $H$ entraîne

$$\forall x \simeq x_0\,,\ \forall f \in H\,,\ f(x) \simeq f(x_0)\,.$$

Pour $x \simeq x_0$ la fonction $f \longmapsto d(f(x), f(x_0)$ ne prend donc que des valeurs infiniment petites sur $H$. Comme elle est continue pour la topologie de la convergence simple, pour $\varepsilon > 0$ standard l'ensemble

$$\{f \in Y^X \mid d(f(x), f(x_0) \leqslant \varepsilon\}$$

est un fermé contenant $H$ donc $\overline{H}$ et donc $f(x) \simeq f(x_0)$ pour $f \in \overline{H}$. Pour l'équicontinuité uniforme c'est la même chose en supprimant l'hypothèse $x_0$ standard.

2. « $f \simeq g$ pour la convergence simple » s'écrit $\forall^s x \in X\,,\ f(x) \simeq g(x)$. Mais $H$ étant équicontinu $f$ et $g$ sont $s$-continues en tout point standard, et alors la relation $f(x) \simeq g(x)$ a lieu pour tout $x$ presque-standard, puisqu'alors, en notant $x_0$ une ombre de $x$,

$$f(x) \simeq f(x_0) \simeq g(x_0) \simeq g(x)\,;$$

Mais étant donné $K$ compact, supposé standard par transfert, tout point de $K$ est presque standard, d'où $\forall x \in K\,,\ f(x) \simeq g(x)$, c'est-à-dire : $f \simeq g$ pour la convergence uniforme sur $K$.

3. Si $Y$ est standard tout point de $Y$ est presque-standard donc tout $f \in H$ possède une ombre $f_0$, donc est presque-standard dans $H$. □

## 4.4. Le théorème de l'ombre continue.

Nous avons vu que pour une fonction non standard la $s$-continuité (propriété externe) n'a aucune raison de coïncider avec la continuité (propriété classique). Reprenons l'exemple de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f(x) = 0 \text{ si } x \leqslant -\varepsilon \\ f(x) = 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ f \text{ est affine sur } [-\varepsilon, 0] \end{cases}$$

avec $\varepsilon > 0$ i.p. En $0$, $f$ n'est pas $s$-continue, bien qu'elle soit continue. Mais $0$ est précisément la point de discontinuité de l'ombre de $f$ ! De façon générale, nous allons voir dans le théorème qui suit que dans le cas métrique la continuité de l'ombre reflète la $s$-continuité de la fonction.

Ce théorème est parfois considéré comme l'analogue non standard des théorèmes d'Ascoli[1].

**Théorème.** *(Théorème de l'ombre continue) Soit $f$ une application d'un espace topologique standard $X$ dans un espace métrique standard $Y$, possédant une ombre, et $x_0 \in X$ standard. Alors*

*1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $f$ est $s$-continue en $x_0$ ;*

*(ii) $\widetilde{f}$ est continue en $x_0$, et $f(x) \simeq \widetilde{f}(x)$ pour tout $x \simeq x_0$.*

*2. Si $X$ est métrique et $f$ $s$-continue en tout point, alors $\widetilde{f}$ est uniformément continue.*

1. • Supposons (i). Posons $f_0 = \widetilde{f}$.

Soit $\varepsilon > 0$ standard. Alors $\forall x \simeq x_0\,,\ f(x) \simeq f(x_0)$ et par conséquent

$$\forall x \simeq x_0\,,\ d(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon/3\,.$$

Par principe de permanence (chap. 3 ex. 5) c'est vrai pour tout $x$ dans un voisinage standard de $x_0$, c'est-à-dire

$$\exists^s V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ \forall x \in V\,,\ d(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon/3\,.$$

D'autre part pour tout $x$ standard, par définition de l'ombre, $f(x) \simeq f_0(x)$ donc $d(f(x), f_0(x)) \leqslant \varepsilon/3$. Par conséquent par inégalité triangulaire

$$\forall^s \varepsilon > 0\,,\ \exists^s V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ \forall^s x \in V\,,\ d(f_0(x), f_0(x_0)) \leqslant \varepsilon,.$$

Par transfert on a alors

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ \forall x \in V\,,\ d(f_0(x), f_0(x_0)) \leqslant \varepsilon,,$$

c'est-à-dire $f_0$ est continue en $x_0$.

• Toujours en supposant (i), $\widetilde{f}$ étant donc continue en $x_0$ et standard elle est $s$-continue en $x_0$, et alors, pour $x \simeq x_0$,

$$f(x) \simeq f(x_0) \simeq \widetilde{f}(x_0) \simeq \widetilde{f}(x)\,.$$

• Inversement, si $\widetilde{f}$ est continue en $x_0$ et $f(x) \simeq \widetilde{f}(x)$ pour tout $x \simeq x_0$, alors, toujours pour $x \simeq x_0$,

$$f(x) \simeq \widetilde{f}(x) \simeq \widetilde{f}(x_0) \simeq f(x_0)\,,$$

c'est-à-dire $f$ est $s$-continue en $x_0$.

2. • Pour la continuité uniforme la preuve est similaire au premier point, hormis le fait que $x_0$ est variable et n'est plus standard, et utilise encore le principe de permanence : supposons $X$ métrique et $f$ $s$-continue en tout point. Posons

[1] en ce sens qu'il se substitue avantageusement, en tant qu'outil d'analyse fonctionnelle, aux théorèmes d'Ascoli dans le cadre de l'analyse non standard

encore $f_0 = \widetilde{f}$. Soit $\varepsilon > 0$ standard. Alors $\forall x, y\,,\ x \simeq y \Longrightarrow f(x) \simeq f(y)$ et par conséquent

$$\forall x, y\,,\ d(x,y) \simeq 0 \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon/3\,.$$

Par principe de permanence on a alors

$$\exists^s \alpha > 0\,,\ \forall x, y\,,\ d(x,y) \leqslant \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon/3\,.$$

On en déduit par le même raisonnement que précédemment

$$\forall^s \varepsilon > 0\,,\ \exists^s \alpha > 0\,,\ \forall^s x, y\,,\ d(x,y) \leqslant \alpha \Longrightarrow d(f_0(x), f_0(y)) \leqslant \varepsilon/3\,,$$

et par transfert $f_0$ est uniformément continue. □

## 4.5. Convergence uniforme locale et semi-locale.

Si l'on examine la preuve non standard du deuxième théorème d'Ascoli vue plus haut, on se rend compte que l'on est passé de la relation $f(x) \simeq g(x)$ *pour tout $x$ standard* (convergence simple) à $f(x) \simeq g(x)$ *pour tout $x$ dans $K$* (convergence uniforme sur $K$) en passant par le mode intermédiaire $f(x) \simeq g(x)$ *pour tout $x$ presque-standard.* On peut se poser la question de la signification topologique de cette relation.

Si $(f_n)$ est une suite d'applications d'un espace topologique $X$ dans un espace métrique $Y$, $f$ une application de $X$ dans $Y$, et $x_0$ un point de $X$, on dit classiquement que $(f_n)$ converge vers $f$ *uniformément au voisinage de $x_0$* s'il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ sur lequel $(f_n)$ converge uniformément. On dit que $(f_n)$ converge vers $f$ *localement uniformément sur $X$* si elle converge uniformément au voisinage de tout point.

On dira ensuite que $(f_n)$ converge vers $f$ *semi-localement uniformément en $x_0$*[1] si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant N\,,\ \forall x \in V\,,\ d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon\,,$$

et que $(f_n)$ converge vers $f$ *semi-localement uniformément sur $X$* si elle le fait en tout point.

Le mode[2] de convergence uniforme semi-local répond précisément à notre problème initial :

**Proposition 5.** *Soient $X$ un espace topologique, $Y$ un espace métrique, $x_0 \in X$, $f : X \longrightarrow Y$ et $(f_n)$ une suite d'applications de $X$ dans $Y$. On suppose $X$, $Y$, $x_0$, $(f_n)$ et $f$ standard. Alors :*

*(i) $(f_n)$ converge vers $f$ semi-localement uniformément en $x_0$*
$\Longleftrightarrow \forall x \simeq x_0\,,\ \forall n$ *i.g.*$\,,\ f_n(x) \simeq f(x)\,;$

*(ii) $(f_n)$ converge vers $f$ semi-localement uniformément sur $X$*
$\Longleftrightarrow \forall x$ *p.s.*$\,,\ \forall n$ *i.g.*$\,,\ f_n(x) \simeq f(x)$.

La démonstration est laissée au lecteur, à qui nous laisserons également le soin d'énoncer un résultat similaire dans le cadre d'un espace d'arrivée uniforme.

[1] Ce mode de convergence a été signalé par G. Lavau, qui a également fait le lien avec son interprétation non standard.

[2] J'ignore si ce mode de convergence provient d'une topologie fonctionnelle. C'est pour cette raison que je l'ai défini (et énoncé la prop. 5) en termes de suites. On pourrait généraliser à des « filets » indexés par un esemble filtrant, mais par souci de simplicité nous nous en tiendrons aux suites.

**Remarques :**

1. On a la hiérarchie suivante des modes de convergence :
$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (v)$[1], où l'on désigne par

$(i)$ : convergence uniforme ;

$(ii)$ : convergence uniforme locale ;

$(iii)$ : convergence uniforme semi-locale ;

$(iv)$ : convergence uniforme sur tout compact ;

$(v)$ : convergence simple.

2. La conservation de la continuité en $x_0$ par limite uniforme s'étend à une limite semi-localement uniforme en $x_0$. La démonstration non standard est quasiment identique au cas global et l'argument central est toujours le principe de permanence : soit $(f_n)$ suite de fonctions continues en $x_0$ cv. vers $f$ semi-localement uniformément en $x_0$. On suppose toutes les conditions standard par transfert. Considérons cette fois $x$ *fixé* infiniment proche de $x_0$. Alors pour tout $n$ standard, $f_n$ est $s$-continue en $x_0$ donc $d(f_n(x), f_n(x_0)) \simeq 0$. D'après le lemme de Robinson c'est vrai pour un $n$ infiniment grand, et dans ce cas $f_n(x) \simeq f(x)$ et $f_n(x_0) \simeq f(x_0)$ d'après la convergence uniforme semi-locale, d'où

$$f(x_0) \simeq f_n(x_0) \simeq f_n(x) \simeq f_n(x_0)\,.$$

3. Le second théorème d'Ascoli peut dès lors se compléter de la façon suivante : pour une suite $(f_n)$ d'applications convergeant simplement, l'ensemble $\{f_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu en $x_0$ si, et seulement si, les $(f_n)$ sont continues et la suite $(f_n)$ converge semi-localement uniformément en $x_0$.

## 4.6. Exercices.

**1.** Soit $(X, d)$ un espace métrique standard.

a) Montrer que si $X$ n'est pas borné, l'ensemble des points limités de $X$ n'existe pas.

b) Montrer que si $X$ n'est pas précompact, l'ensemble des points quasistandard de $X$ n'existe pas.

[1] Les modes de convergence $(iii)$ et $(iv)$ sont équivalents dans le cas où l'espace de départ est métrique (remarque due à M. Quercia).

# CHAPITRE 5.
# THÉORIE NON STANDARD
# DE LA MESURE
# ET DE L'INTEGRATION.

## 5.1. Ensembles et fonctions non Lebesgue-mesurables.

Nous allons voir ici comment l'Analyse non Standard permet, en se substituant à l'axiome de l'Ultrafiltre, de « construire » des ensembles et des fonctions non Lebesgue-mesurables.

**Théorème 1.** *(Théorème de Davis) Si $\omega$ est un entier i.g., l'ensemble $A$ défini par*

$$A = {}^s\{x \in \mathbb{R} \mid \text{la } \omega\text{-ième décimale de } x \text{ en base 2 vaut 1}\}$$

*n'est pas Lebesgue-mesurable.*

**Lemme 1 (classique).** *Soit $f$ Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}$. Alors, pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f$ est dérivable en $x$ et $F'(x) = f(x)$.*

Voir par exemple [RU].

**Corollaire.** *Soit $f$ Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}$. Si le groupe des périodes de $f$ est dense, alors $f$ est constante presque-partout.*

En effet, avec les notations du lemme en notant $a$ un point tel que $F'(a) = f(a)$ et $\mathcal{P}$ le groupe des périodes de $f$, pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathcal{P}}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathcal{P}}} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f = f(a)\,.$$

**Fin de la preuve.** Tout dyadique standard étant de longueur standard, on a

$$\forall^s x \in A\,,\ \forall^s r \text{ dyadique}\,,\ x + r \in A\,,$$

et par transfert $A$ est invariant par les translations par tous les dyadiques. D'après le corollaire appliqué à la fonction caractéristique de $A$, ce dernier ou son complémentaire est de mesure nulle.

Mais d'autre part en notant $B = A \cap [0,1]$ on vérifie facilement, en raisonnant sur les réels standard par transfert, que les ensembles $B$ et $1 - B$ forment une partition de $[0,1]$, ce qui donne : $\lambda(B) = \dfrac{1}{2}$, ce qui constitue une contradiction. □

**Remarque :** L'intérêt de cette construction est qu'elle prouve qu'en analyse classique, il existe une démonstration de l'existence de parties de $\mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurables utilisant seulement l'axiome de l'ultrafiltre, qui est strictement plus faible que l'axiome du choix, alors que la preuve habituelle utilise pleinement ce dernier (choix d'un représentant dans chaque classe modulo les rationnels).

Mais une telle démonstration est maintenant facile à trouver à la lumière de la preuve précédente et de la section 1.6 : il suffit de considérer un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{N}$ contenant le filtre de Fréchet, et de prendre l'ensemble $\{x_F,\ F \in \mathcal{F}\}$, où $x_F$ est le réel de $[0,1[$ dont la n^e décimale dyadique vaut 1 si, et seulement si, $n \in F$. Un raisonnement en tous points similaire à celui qui vient d'être fait montre que cet ensemble n'est pas mesurable.

Dans la même veine que le théorème 1. on a également le résultat suivant, qui prouve qu'une fonction fortement $s$-discontinue, même si elle est $C^\infty$, peut avoir une ombre qui n'est pas Lebesgue-mesurable.

**Théorème 2.** *(Théorème de Taylor) Soit $\omega$ un entier (forcément infiniment grand) vérifiant les propriétés suivantes : (i) $\omega$ possède des diviseurs standard arbitrairement grands ; (ii) Il existe un entier standard $a$ non nul ne divisant pas $\omega$. Alors la fonction $g : x \longmapsto e^{2i\pi\omega x}$ possède une ombre $\widetilde{g}$ qui n'est pas Lebesgue-mesurable.*

Remarquons tout d'abord qu'un tel entier $\omega$ existe bien : il suffit de considérer un ensemble fini P de nombres premiers contenant tous les nombres premiers standard sauf l'un d'entre eux, et de prendre le produit des éléments de $P$. Remarquons également que la fonction $g$ possède bien une ombre puisque le cercle unité étant compact tout point de l'ensemble image de $g$ est presque-standard.

**Lemme 2 (classique).** *Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mesurable vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)f(y)$ est continue, et par conséquent soit identiquement nulle, soit de la forme $x \longmapsto e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

En effet, si $f$ s'annule elle est identiquement nulle. Sinon, d'après le lemme 1., il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^a f$ soit non nul. Mais alors la relation

$$f(x)\int_0^a f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_x^{a+x} f(y)\,\mathrm{d}y$$

entraîne la continuité de $f$.

**Fin de la preuve.** Soient $\omega$ et $a$ comme indiqué dans l'énoncé. La non-mesurabilité de $\widetilde{g}$ résulte alors du lemme 2. et des étapes suivantes :

1. Les conditions imposées à $\omega$ entraînent la non-continuité de $\widetilde{g}$ en $0$ : soit $N$ un entier standard donné et $n \geqslant N$ un entier standard divisant $\omega$. Posons $x = 1/na$. Soit $r$ le reste de la division euclidienne de $\omega/n$ par $a$. Alors $r \in [\![ 1, a-1 ]\!]$, et

$$g(x) = e^{2i\pi\omega/na} = e^{2i\pi r/a}\,,$$

et donc,

$$|g(x)-1| = 2\sin(\pi r/a) \geqslant 2\sin(\pi/a)$$

d'où, $x$ étant standard, par conservation des inégalités par passage à la partie standard

$$|\widetilde{g}(x)-1| = |g(x)^*-1| = |g(x)-1|^* \geqslant 2\sin(\pi/a)\,,$$

et $x$ étant standard arbitrairement par principe de permanence c'est vrai pour un $x$ infiniment petit, et $\widetilde{g}$ n'est pas continue en $0$.

2. Or, $g$ vérifie l'équation fonctionnelle du lemme 2. donc $\widetilde{g}$ aussi, par transfert et par compatibilité de la relation de proximité avec les opérations algébriques. □

**Remarques :**

1. On a donc prouvé, non seulement que $\widetilde{g}$ n'est pas mesurable, mais qu'en posant $u(x) = \omega x - E(\omega x)$ la fonction $\widetilde{u}$ ne l'est pas non plus : si $\widetilde{u}$ était mesurable alors $\widetilde{g}$ le serait aussi, puisque, $g$ étant standard et continue, pour $x$ standard

$$\widetilde{g}(x) = (e^{2i\pi\omega x})^* = (e^{2i\pi u(x)})^* = e^{2i\pi(u(x))^*} = e^{2i\pi\widetilde{u}(x)} ,$$

et par transfert c'est vrai pour tout $x$.

2. Il en découle également que si $\lambda$ est un réel standard non nul alors l'ombre de la fonction $x \longmapsto e^{\lambda\omega ix}$ n'est pas mesurable.

## 5.2. Mesurabilité.

**Proposition 1. et définition 1.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Il existe une partition finie $\mathcal{P}$ de $X$ en ensembles mesurables telle que*

$$\forall^s A \subset X \text{ mesurable, } A = \bigcup_{P \in \mathcal{P}\,,\, P \subset A} P\,.$$

*Une telle partition est appelée* partition adaptée à la tribu $\mathcal{T}$.

En effet, il existe un ensemble fini de mesurables contenant tous les mesurables standards, et la tribu engendrée par cet ensemble est engendrée par une *partition* finie (classique). □

**Proposition 2.** *Soit $X$ un espace mesurable, $Y$ un espace métrique précompact muni de sa tribu borélienne, et $f$ une application de $X$ dans $Y$. On suppose $X$, $Y$, et $f$ standard et on se fixe une partition $\mathcal{P}$ adaptée à $X$. Alors*

$$f \text{ est mesurable } \iff \forall P \in \mathcal{P}\,,\ \operatorname{diam}(f(P)) \simeq 0\,.$$

• Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $\operatorname{diam}(f(P))$ ne soit pas infiniment petit, c'est-à-dire

$$\exists x, y \in \mathcal{P}\,,\ \exists^s r > 0\,,\ d(f(x), f(y) \geqslant r\,.$$

Par précompacité de $Y$, $x$ et $y$ sont quasistandard, d'où

$$\exists^s x_0, y_0 \in Y\,,\ d(f(x), x_0) \leqslant \frac{r}{3} \text{ et } d(f(y), y_0) \leqslant \frac{r}{3}\,.$$

Mais alors $B(x_0, r/3)$ est standard, mesurable, et son image réciproque ne se décompose pas suivant $\mathcal{P}$. Donc $f$ n'est pas mesurable.

• Inversement, supposons $\forall P \in \mathcal{P}\,,\ \operatorname{diam}(f(P)) \simeq 0$. Alors en choisissant $x_P \in P$ et en posant

$$g(x) = f(x_P) \text{ si } x \in P\,,$$

$g$ est une fonction étagée vérifiant $\forall x \in X\,,\ g(x) \simeq f(x)$, d'où

$$\forall^s n \in \mathbb{N}^*\,,\ \exists g_n \text{ étagée } \forall x \in X\,,\ d(g_n(x), f(x)) \leqslant \frac{1}{n}\,,$$

et par transfert c'est vrai pour tout $n$ donc $f$ est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées, donc mesurable (cf. Annexe A1). □

## 5.3. Discrétisation des mesures positives.

**Préliminaires.**

a) Dans ce qui suit on emploiera le mot *mesure* pour désigner, en l'absence d'autre précision, aussi bien une mesure dénombrablement additive sur une tribu (ou $\sigma$-algèbre) de parties d'un ensemble $X$, qu'une mesure finiment additive sur une algèbre de parties de $X$. Dans les deux cas on parlera d'espace mesurable et d'espace mesuré.

b) On note $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, le point $+\infty$ étant pris standard, et noté plus simplement $\infty$. La demi-droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}^+$ est munie de sa topologie usuelle pour laquelle elle forme un espace compact standard, de sorte que tout point est presque-standard. Si $x \in \mathbb{R}^+$ est infiniment grand alors $x \simeq \infty$ et donc $x^* = \infty$. Par conséquent, toute application d'un ensemble standard dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ possède une ombre.

Toutes les mesures considérées dans cette section sont supposées à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

c) Une mesure $\mu$ un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ sera dite *discrète*[1] (sous-entendu : à support fini) si elle est combinaison linéaire finie de mesures de Dirac, autrement dit s'il existe une application $p$ de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ à support fini telle qu'en notant $\delta(x)$ la mesure de Dirac au point $x$ on ait

$$\mu = \sum_{x \in X} p(x)\delta(x)\,,$$

ou encore, pour toute partie $A$ mesurable,

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} p(x)\,,$$

c'est-à-dire

$$\mu(A) = \sum_{x \in X} p(x)\chi_A(x)\,,$$

avec la convention $\infty \times 0 = 0$. On notera que les égalités précédentes permettent de prolonger $\mu$ à une mesure définie sur $\mathcal{P}(X)$ tout entier.

d) Les *mesures de décompte* sont les mesures discrètes pour lesquelles l'application $p$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, c'est-à-dire les sommes d'un nombre fini de mesures de Dirac prises en des points distincts : étant donné un ensemble fini $\mathcal{X} \subset X$, la mesure de décompte de $\mathcal{X}$ est la mesure $\mu$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{T}\,,\ \mu(A) = \mathrm{Card}(A \cap \mathcal{X})\,.$$

Compte tenu de cette définition, la mesure de décompte de $\mathcal{X}$ est de masse totale finie égale à $\mathrm{Card}\,\mathcal{X}$.

e) Une *mesure de décompte avec répétition* est similaire à une mesure de décompte, sauf que chaque élément de $\mathcal{X}$ peut être « compté plusieurs fois ».

[1] Nous avons adopté cette définition, qui n'est pas la définition usuelle d'une mesure discrète, car elle est mieux adaptée aux espace mesurables quelconques que nous considérons, pour lesquels les singletons ne sont pas nécessairement mesurables

Autrement dit, les mesures de décompte avec répétition sont les sommes finies de mesures de Dirac, ou encore : $\mu$ est une mesure de décompte avec répétition s'il existe une *famille* $(x_i)_{i\in I}$ ($I$ ensemble fini) d'éléments de $X$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{T}\,,\ \mu(A) = \mathrm{Card}\{i \in I \mid x_i \in \mathcal{A}\}\,,$$

ou encore :

$$\mu(A) = \sum_{i\in I} \chi_A(x_i)\,.$$

On dit alors que $\mu$ est la mesure de décompte de la famille $(x_i)$.

**Proposition 2.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable standard. Si $\mu$ est une mesure sur $\mathcal{T}$, son ombre $\tilde{\mu}$ est une mesure finiment additive sur $\mathcal{T}$.*

Il suffit de montrer que $\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)$ si $A$ et $B$ sont disjoints. Par transfert on peut supposer $A$ et $B$ standard, et dans ce cas, $A \cup B$ étant standard,

$$\tilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A \cup B)^* = (\mu(A) + \mu(B))^* = \mu(A)^* + \mu(B)^* = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B)\,.$$

Tous les théorèmes qui suivent sont des théorèmes de discrétisation d'une mesure par un procédé non standard.

Tout d'abord commençons par un résultat facile. N'importe quelle mesure se comporte à peu de choses près comme une mesure discrète :

**Théorème 3.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesurable. Il existe une application $p$ de $\mathcal{X}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ à support fini telle que*

$$\forall^s A \in \mathcal{T}\,,\ \mu(A) = \sum_{x\in A} p(x)\,.$$

*Autrement dit, il existe une mesure discrète $\nu$ telle que $\forall^s A \in \mathcal{T}\,,\ \mu(A) = \nu(A)$.*

Il suffit de se donner une partition $\mathcal{P}$ adaptée à $\mathcal{T}$, et de choisir, pour chaque $P \in \mathcal{P}$, un point $x$ de $P$ auquel on affecte la masse $p(x) = \mu(P)$. □

**Corollaire 1.** *Toute mesure standard sur un espace mesurable standard $(X, \mathcal{T})$ est la restriction à $\mathcal{T}$ de l'ombre d'une mesure discrète sur $\mathcal{P}(X)$.*

En définissant, avec les notations précédentes, $\nu$ sur $P(X)$ tout entier par $\nu(A) = \sum_{x\in A} p(x)$, on a $\forall^s A \in \mathcal{T}\,,\ \mu(A) = \nu(A) = \tilde{\nu}(A)$, et par transfert c'est vrai pour toute partie mesurable $A$. □

On en déduit facilement le résultat d'analyse classique suivant :

**Corollaire 2.** *Toute mesure positive $\mu$ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ est prolongeable à une mesure finiment additive définie sur toutes les parties de $X$.*

Par transfert on peut supposer $X, \mathcal{T}, \mu$ standard. D'après le corollaire 1 il existe alors une mesure $\nu$ sur $\mathcal{P}(X)$ telle que $\mu$ soit la restriction à $\mathcal{T}$ de $\tilde{\nu}$, et cette dernière est une mesure finiment additive d'après la proposition 1. □

Le résultat qui suit est beaucoup moins évident : toute mesure est « presque » proportionnelle à une mesure de décompte avec répétitions ! Les idées à la base des démonstrations des théorèmes 2 et 3, sont dues à Loeb [LO].

**Théorème 4.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesurable. Il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $X$ et un réel positif $\Delta$ tels que*

$$\forall^s A \in \mathcal{T}\,,\ \Delta \sum_{i=1}^{n} \chi_A(x_i) \simeq \mu(A)\,.$$

*Autrement dit, il existe une mesure $\nu$, proportionnelle à une mesure de décompte avec répétitions, telle que*

$$\forall^s A \in \mathcal{T}\,,\ \nu(A) \simeq \mu(A)\,.$$

**Lemme.** *Soient $x_1, \ldots, x_n > 0$ tels que $\sum x_i = 1$, et $\varepsilon \in ]0,1[$. Il existe $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$\forall i \in [\![ 1, n ]\!]\,,\ \left| x_i - \frac{m_i}{\sum m_i} \right| \leqslant \frac{m_i \varepsilon}{\sum m_i}\,.$$

Cela résulte facilement de la densite de $\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour une preuve un peu plus « constructive » : on peut supposer $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Soit $\delta > 0$ tel que $(1+\delta)^2 \leqslant 1+\varepsilon$ et $(1-\delta)^2 \geqslant 1-\varepsilon$. Soit $q \geqslant \max\left(\frac{1}{2x_1}\big(\frac{1}{\delta}+1\big), \frac{n}{2\delta}\right)$, et $m_i$ l'entier (ou l'un des deux entiers) le plus proche de $qx_i$. On a alors

$$qx_i - \frac{1}{2} \leqslant m_i \leqslant qx_i + \frac{1}{2}\,,$$

d'où en sommant $q - \frac{n}{2} \leqslant \sum m_i \leqslant q + \frac{n}{2}$, d'où, compte tenu de $\frac{n}{2} \leqslant \delta q$,

$$q(1-\delta) \leqslant \sum m_i \leqslant q(1+\delta)\,. \tag{1}$$

D'autre part $m_i - \frac{1}{2} \leqslant qx_i \leqslant m_i + \frac{1}{2}$ d'où

$$\frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{2m_i}\right) \leqslant \frac{x_i}{m_i} \leqslant \frac{1}{q}\left(1 + \frac{1}{2m_i}\right)\,.$$

Or $q \geqslant \frac{1}{2x_1}\big(\frac{1}{\delta}+1\big)$ donne $2m_i \geqslant 2qx_i - 1 \geqslant 2qx_1 - 1 \geqslant \frac{1}{\delta}$, d'où

$$\frac{1-\delta}{q} \leqslant \frac{x_i}{m_i} \leqslant \frac{1+\delta}{q}\,, \tag{2}$$

et le produit de (1) et (2) donne

$$1 - \varepsilon \leqslant (1-\delta)^2 \leqslant \frac{x_i}{m_i} \sum m_i \leqslant (1+\delta)^2 \leqslant 1 + \varepsilon\,,$$

c'est-à-dire le résultat voulu. □

**Fin de la preuve.** Soit $\mathcal{P}$ une partition adaptée à $(X, \mathcal{T})$. Partitionnons $\mathcal{P}$ en écrivant $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$ où $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$, resp. $\mathcal{P}_3$) est l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ de mesure finie non nulle (resp. infinie, resp. nulle). On va construire la famille finie $(x_i)$ en recollant une famille $(y_j)$ construite à l'aide de $\mathcal{P}_1$ et une famille $(z_k)$ construite à l'aide de $\mathcal{P}_2$. Le réel $\Delta$ sera défini à l'aide de $\mathcal{P}_1$.

1. Si $\mathcal{P}_1 = \varnothing$ on prend pour $(y_i)$ la famille vide et on prend $\Delta > 0$ arbitraire. Sinon, considérons un réel $\delta > 0$ infiniment petit et posons $\mathcal{P}_1 = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $Y = P_1 \cup \cdots \cup P_n$, et $\varepsilon = \delta/\mu(Y)$. D'après le lemme il existe des entiers $m_i \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall i \in [\![ 1, n ]\!] \,, \; \left| \frac{\mu(P_i)}{\mu(Y)} - \frac{m_i}{\sum m_i} \right| \leqslant \frac{m_i \varepsilon}{\sum m_i} \,.$$

Dans ce cas on pose $\Delta = \mu(Y)/\sum m_i$. On a alors

$$\forall i \in [\![ 1, n ]\!] \,, \; \left| \mu(P_i) - \Delta m_i \right| \leqslant \frac{m_i \delta}{\sum m_i} \,.$$

On construit alors la famille $(y_j)$ en choisissant, pour chaque $i \in [\![ 1, n ]\!]$, un point dans $P_i$ ($P_i$ est non vide car de mesure non nulle), que l'on compte $m_i$ fois. Pour $A \subset Y$ mesurable standard, en sommant les inégalités précédentes pour chaque $i$ tel que $P_i \subset A$, on a alors

$$\left| \mu(A) - \Delta \sum_j \chi_A(y_j) \right| \leqslant \delta \,,$$

et donc

$$\Delta \sum_j \chi_A(y_j) \simeq \mu(A) \,.$$

2. Si $\mathcal{P}_2 = \varnothing$ on prend pour $(z_k)$ la famille vide. Sinon, on considère un entier $\omega$ tel que $\Delta\omega$ soit infiniment grand, et on construit la famille $(z_k)$ en posant $\mathcal{P}_2 = \{Q_1, \ldots, Q_p\}$, $Z = Q_1 \cup \cdots \cup Q_p$, et en choisissant, pour chaque $i \in [\![ 1, p ]\!]$, un point de $Q_i$ que l'on compte $\omega$ fois. Alors, pour chaque $A \subset Z$ mesurable standard non vide, $A$ contient un élément de $\mathcal{P}_2$, de sorte que

$$\Delta \sum_k \chi_A(z_k) \geqslant \Delta\omega \simeq \infty = \mu(A) \,,$$

et si $A = \varnothing$ la relation $\Delta \sum_k \chi_A(z_k) \simeq \mu(A)$ est évidente.

3. Soit $(x_i)$ une famille obtenue en recollant les familles $(y_j)$ et $(z_k)$. Pour $A \subset X$ mesurable standard on a alors

$$\begin{aligned} \Delta \sum_i \chi_A(x_i) = \Delta \sum_j \chi_A(y_j) + \Delta \sum_k \chi_A(z_k) &\simeq \Delta \left( \mu(A \cap Y) + \mu(A \cap Z) \right) \\ &= \mu(A) \,. \end{aligned}$$

**Corollaire.** *Toute mesure standard sur un espace mesurable standard $(X, \mathcal{T})$ est la restriction à $\mathcal{T}$ de l'ombre d'une mesure sur $\mathcal{P}(X)$ proportionnelle à une mesure de décompte avec répétitions.*

Une mesure sur un espace mesurable dont les singletons sont mesurables est dite *diffuse* si tout singleton est de mesure nulle. Le théorème suivant permet, dans le cas d'une mesure diffuse $\mu$ sur un espace mesurable séparable[1], de se passer des répétitions dans le résultat précédent et d'approcher $\mu$ par une vraie mesure de décompte :

[1] cf. Annexe A2.

**Théorème 5.** *Soit $\mu$ une mesure diffuse sur un espace mesurable séparable $(X, \mathcal{T})$. Il existe un ensemble fini $\mathcal{X} \subset X$ et un réel positif $\Delta$ tels que*

$$\forall^s A \in \mathcal{T}\,,\ \Delta \sum_{x \in \mathcal{X}} \chi_A(x) \simeq \mu(A)\,.$$

*Autrement dit, il existe une mesure $\nu$, proportionnelle à une mesure de décompte, telle que*

$$\forall^s A \in \mathcal{T}\,,\ \nu(A) \simeq \mu(A)\,.$$

Il suffit modifier comme suit la démonstration du théorème précédent : On construit non plus une famille mais un *ensemble* fini $\mathcal{X}$ réunion de deux ensembles $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ définis respectivement à l'aide de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. A l'étape 1 après avoir obtenu $\left|\mu(P_i) - \Delta m_i\right| \leqslant \dfrac{m_i \delta}{\sum m_i}$, d'après le théorème de Lyapunov (cf. Annexe A2) il existe une partition de chaque $P_i$ en ensembles mesurables de même mesure $\mu(P_i)/m_i$ et il suffit de choisir un point dans chacun de ces sous-ensembles. Pour l'étape 2 Il suffit de remarquer que pour une mesure diffuse sur un espace séparable toute partie mesurable de mesure non nulle est infinie, ce qui permet de choisir $\omega$ points dans $Q_i$. □

**Corollaire.** *Toute mesure diffuse standard sur un espace mesurable séparable standard $(X, \mathcal{T})$ est la restriction à $\mathcal{T}$ de l'ombre d'une mesure sur $\mathcal{P}(X)$ proportionnelle à une mesure de décompte.*

## 5.4. Fonctions intégrables.

Dans ce paragraphe nous donnons plusieurs moyens de discrétiser une intégrale par un procédé non standard :

**Théorème 6.** *Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré standard, $f$ une application standard mesurable de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, et $\mathcal{P}$ une partition adaptée à $(X, \mathcal{T})$. Alors :*

*1.* $\displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \left(\sum_{P \in \mathcal{P}} \inf\ f(P)\,\mu(P)\right)^{*}$. *Par conséquent, $f$ est intégrable si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} \inf\ f(P)\,\mu(P)$ est limité, et, sur l'ensemble des applications mesurables de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, l'application $f \longmapsto \displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu$ est l'ombre de $f \longmapsto \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}} \inf\ f(P)\,\mu(P)$.*

*2. Si $\mu$ et $f$ sont bornées alors en choisissant un point $\xi_P$ quelconque dans chaque $P \in \mathcal{P}$ on a :* $\displaystyle\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \left(\sum_{P \in \mathcal{P}} f(\xi_P)\,\mu(P)\right)^{*}$.

Les théorèmes qui suivent sont les équivalents des résultats de la section 5.3 lorsqu'on passe des fonctions caractéristiques d'ensembles à toutes les fonctions mesurables :

**Théorème 7.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré standard. Il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $X$ et un réel positif $\Delta$ tels que, pour toute application standard* *mesurable de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, ou intégrable de $X$ dans $\mathbb{C}$, on ait*

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \simeq \int_X f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

*Autrement dit, sur $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$, ou sur l'ensemble des applications mesurables de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, l'application $f \longmapsto \displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu$ est l'ombre de $f \longmapsto \Delta \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.*

**Théorème 8.** *Soit $\mu$ une mesure diffuse standard sur un espace mesurable séparable standard $(X, \mathcal{T})$. Il existe un ensemble fini $\mathcal{X} \subset X$ et un réel positif $\Delta$ tels que, pour toute application standard mesurable de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, ou intégrable de $X$ dans $\mathbb{C}$, on ait*

$$\Delta \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) \simeq \int_X f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

*Autrement dit, sur $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$, ou sur l'ensemble des applications mesurables de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, l'application $f \longmapsto \displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu$ est l'ombre de $f \longmapsto \Delta \displaystyle\sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)$.*

[démonstrations à écrire...]

[à suivre...]

# ANNEXES : COMPLÉMENTS DE THÉORIE DE LA MESURE.

## A1. Compléments sur les fonctions étagées et mesurables.

Le résultat classique « toute limite simple de fonctions mesurables est mesurable » est valide lorsque l'espace d'arrivée est métrique muni de sa tribu borélienne :

**Proposition 1.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, et $X$ un espace métrique, muni de sa tribu borélienne. Toute limite simple d'une suite de fonctions mesurables de $\Omega$ dans $X$ est mesurable.*

En effet, soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers $f$. Il s'agit de montrer que pour tout ouvert $U$ de $X$ l'ensemble $f^{-1}(U)$ est mesurable. Si $U = X$ c'est trivial. Sinon, $F = X \setminus U$ est un fermé non vide, et alors $f(\omega) \in U$ si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(f_n(\omega), F) > \dfrac{1}{p}$ pour $n$ assez grand, de sorte que, en notant $A_p = \{x \in X \mid d(x, F) > \dfrac{1}{p}\}$,

$$f^{-1}(U) = \bigcup_p \bigcup_N \bigcap_{n \geqslant N} f_n^{-1}(A_p)$$

est mesurable. □

Conséquemment, les limites simples de suites de fonctions étagées sont mesurables. La réciproque est vraie sous une hypothèse de précompacité :

**Proposition 2.** *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable, et $X$ un espace métrique, muni de sa tribu borélienne. Alors*

*(i) Si $X$ est précompact, toute fonction mesurable de $\Omega$ dans $X$ est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées.*

*(ii) Si les boules de $X$ sont précompactes, toute fonction mesurable de $\Omega$ dans $X$ est limite simple d'une suite de fonctions étagées.*

Pour (i) : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n$ l'application définie comme suit : on choisit un recouvrement fini de $X$ par des boules non vides de rayon $1/2n$, on en déduit par intersections un recouvrement fini $\mathcal{B}_n$ par des ensembles de diamètre au plus $1/n$, non vides, disjoints, et mesurables, pour chaque $B \in \mathcal{B}_n$ on choisit un $x_B \in B$, et enfin pour $\omega \in \Omega$ on pose

$$f_n(\omega) = x_B \text{ si } f(\omega) \in B\,.$$

Alors $\sup_{\omega\in\Omega} d(f_n(\omega), f(\omega)) \leqslant \frac{1}{n}$, de sorte que $(f_n)$ converge vers $f$ uniformément sur $\Omega$.

Pour (ii) : Si les boules sont précompactes $X$ est réunion croissante des parties précompactes mesurables $X_n = X \cap B(x_0, n)$ ($x_0$ fixé). On procède de façon similaire au cas précédent en choisissant, pour chaque $n$, un recouvrement fini $\mathcal{B}_n$ de $X_n$, et en rajoutant la condition $f_n(\omega) = x_0$ si $\omega \notin f^{-1}(X_n)$. Pour $\omega \in f^{-1}(X_p)$ on a alors $d(f_n(\omega), f(\omega)) \leqslant \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant p$, d'où la convergence simple. □

## A2. Un théorème de Lyapunov.

**Définition.** *Un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ est dit* séparable *s'il existe un sous-ensemble de $\mathcal{T}$ au plus dénombrable qui sépare les points.*

**Proposition 3.** *Si $(X, \mathcal{T})$ est séparable les singletons sont mesurables.*

Preuve succinte : soit $(T_n)$ une suite d'ensembles mesurables séparant les points, et $a \in X$. L'intersection de ceux des $T_n$ qui contiennent $a$ est mesurable et d'intersection $\{a\}$. □

L'objet de ce paragraphe est la preuve du théorème suivant, sorte de « théorème des valeurs intermédiaires » pour la théorie de la mesure :

**Théorème de Lyapunov.** *Soit $\mu$ une mesure positive, diffuse, sur un espace mesurable séparable $(X, \mathcal{T})$. Pour toute partie $A$ mesurable telle que $\mu(A) < \infty$, l'ensemble des mesures des parties mesurables de $A$ est le segment $[0, \mu(A)]$.*

**Lemme.** *Soit $\mu$ une mesure positive, de masse totale finie, sur un espace mesuré séparable $(X, \mathcal{T})$. Si toute partie mesurable a pour mesure $0$ ou $\mu(X)$, la mesure est concentrée sur un point.*

Preuve succinte : on peut supposer $\mu(X) \neq 0$. Soit $(T_n)$ une suite d'ensembles mesurables séparant les points, et $A$ le complémentaire de la réunion de ceux des $T_n$ qui sont de mesure nulle. Alors $\mu(A) = \mu(X)$, et $A$ est un singleton. □

**Fin de la preuve.**

Si $\mu(A) = 0$ c'est immédiat. Sinon, on se donne donc $b \in ]0, \mu(A)[$ et on cherche $B$ mesurable de mesure $b$. La mesure $\mu$ étant diffuse, d'après le lemme il existe un ensemble $C \subset A$ tel que $\mu(C) \notin \{0, \mu(A)\}$, et donc, quitte à considérer le complémentaire, un ensemble $C \subset A$ tel que $\mu(C) \leqslant \mu(A)/2$, et en itérant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $C \subset A$ tel que $\mu(C) \leqslant \varepsilon$.

On en déduit que pour toute partie $C$ de $A$ telle que $\mu(C) < b$, il existe $C'$ disjoint de $C$ tel que $\frac{b - \mu(C)}{2} \leqslant \mu(C') \leqslant b - \mu(C)$, ce qui permet de construire par récurrence une suite croissante $(C_n)$ de parties de $A$ telle que $C_0 = \varnothing$ et $0 \leqslant b - \mu(C_{n+1}) \leqslant \frac{b - \mu(C_n)}{2}$, et alors $\mu(\bigcup C_n) = \lim(\mu(C_n)) = b$. □

# SOLUTIONS DES EXERCICES.

## Exercices du chapitre 1.

**1.** Si toutes les parties finies de $E$ sont standard alors l'ensemble $\mathcal{P}_f(E)$ des parties finies de $E$ n'a que des éléments standard, donc il est standard fini, et donc $E$ est fini, et standard par transfert car défini de façon unique à partir de $\mathcal{P}_f(E)$ (par exemple parce que $E$ est le plus grand élément de $\mathcal{P}_f(E)$ pour l'inclusion). A fortiori si toutes les parties de $E$ sont standard alors $E$ est standard fini. Inversement si $E$ est standard fini alors $\mathcal{P}_f(E) = \mathcal{P}(E)$ est fini, et standard par transfert, donc toutes les parties de $E$ sont standard.

**2.** On va montrer que chacune des conditions a), b), c) équivaut à « $E$ standard fini », et que d) équivaut à « $E$ est la réunion d'un ensemble standard fini et d'un ensemble de cardinal $\leqslant 1$ ».

• Il existe un ensemble fini de parties de $E$ contenant toutes les parties standard de $E$, et donc, en considérant toutes les intersections des éléments d'un tel ensemble et de leurs complémentaires, il existe une partition finie $\mathcal{P}$ de $E$ telle que toute partie standard de $E$ soit réunion d'éléments de $\mathcal{P}$. Dans chacun des quatre cas a), b), c), d), les éléments de $\mathcal{P}$ sont donc nécessairement des singletons, donc $E$ est fini.

• Dans chacun des cas a), b), c), tout élément $x$ de $E$ est inclus dans une partie standard de $E$, qui, du coup, est standard finie, et donc $x$ est standard, et donc $E$ est standard puisque tous ses éléments le sont.

Dans le cas d) le même raisonnement donne : pour tous $x, y \in E$ l'un des deux est standard, et donc il ne peut exister deux éléments non standard de $E$.

• Les réciproques sont évidentes.

**3.** a) Soit $E$ universel fini. On a $\forall^s n \in \mathbb{N}$, $[\![0, n]\!] \subset E$, et donc $\operatorname{Card} E$ est i.g. Inversement, soit $\omega \in \mathbb{N}$ i.g. Pour tout ensemble standard fini $F$, il existe un ensemble fini $X$ de cardinal $< \omega$ contenant tous les éléments de $F$, à savoir $F$ lui-même. D'après l'axiome d'idéalisation, il existe un ensemble universel $X$ de cardinal $< \omega$.

b) Soit $E$ un ensemble universel. Pour tout ensemble standard fini $F$, il existe un ensemble fini $X$ élément de $E$ contenant tous les éléments de $F$, à savoir $F$ lui-même. D'après l'axiome d'idéalisation, il existe un ensemble universel fini $X$ élément de $E$. Le reste fonctionne sur le même principe, puisque si $F$ est standard fini, en prenant $X = F$ les ensembles $\{X\}$, $X \times X$, $\mathcal{P}(X)$, $X^X$, ainsi que tous les éléments et toutes les parties de $X$, sont standard et donc éléments de $E$, et $\operatorname{Card}(X)$ est inférieur à n'importe quel entier i.g. $\omega$ donné.

**4.** a) Si $s$ est une suite standard d'entiers $s(0)$ est un entier standard par transfert. Inversement si $p \in \mathbb{N}$ est standard il s'écrit $s(0)$ où $s$ est la suite (standard) $n \longmapsto n+p$. Les entiers de la forme $s(0)$ où $s$ est une suite standard sont donc les entiers standards, et par conséquent les entiers $0$-inaccessibles sont les entiers infiniment grands.

b) Il existe un sous-ensemble fini $S$ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ contenant toutes les suites standard (axiome d'idéalisation). L'ensemble des entiers $s(\omega)$, $s$ parcourant $S$, est fini, donc possède un plus grand élément $M$, et tout entier $\omega' \geqslant M$ est $\omega$-inaccessible.

c) Soit $S$ un ensemble standard fini de suites d'entiers naturels. La suite $n \longmapsto t(n) = \max\{s(n)\,,\, s \in S\}$ est standard par transfert donc en posant $x = t(\omega)$, l'entier $x$ dépasse tous les éléments de $S$ et tout élément de $[\![\, 0, x \,]\!]$ est $\omega$-accessible et donc élément de $E$. Par idéalisation, il existe un entier naturel $x$ supérieur à tous les $s(\omega)$ ($s$ suite standard d'entiers), tel que $[\![\, 0, x \,]\!] \subset E$.

d) Supposons $\omega \not\prec \omega'$ et $\omega' \not\prec \omega''$. Il existe donc $s, s'$ suites standard d'entiers telles que $s(\omega) \geqslant \omega'$ et $s'(\omega') \geqslant \omega''$. La suite $n \longmapsto t(n) = \max\{s'(k)\,,\, k \leqslant s(n)\}$ est alors standard par transfert et vérifie $t(\omega) \geqslant s'(\omega') \geqslant \omega''$, et donc $\omega \not\prec \omega''$.

e) Soient $\omega_1, \omega_2 \prec \omega$, et supposons par l'absurde qu'il existe une suite standard $s$ telle que $s(f(\omega_1, \omega_2)) \geqslant \omega$. Pour fixer les idées, on peut supposer sans perte de généralité que $\omega_1 \leqslant \omega_2$. La suite $n \longmapsto t(n) = \max\{s(f(k,n))\,,\, k \leqslant n\}$ est standard par transfert et vérifie alors

$$t(\omega_2) \geqslant s(f(\omega_1, \omega_2)) \geqslant \omega\,,$$

ce qui contredit $\omega_2 \prec \omega$.

**5.** a) Soit $S$ un ensemble standard fini de suites d'entiers naturels. La suite $t : n \longmapsto \max\{s(n)\,,\ s \in S\}$ est standard par transfert, donc $t \circ t$ aussi, donc $t \circ t(\omega) \leqslant \omega'$, et donc l'entier $x = t(\omega)$ vérifie :

$$\forall^{s} s \in S\,,\ s(\omega) \leqslant x \text{ et } s(x) \leqslant \omega'\,.$$

Par idéalisation il existe un entier $x$ tel que $\omega \prec x \prec \omega'$.

b) Reprendre la démonstration précédente en remplaçant $t \circ t$ par $t \circ t \circ \ldots \circ t$ ($p+1$ fois). En anticipant sur le chapitre suivant (§ 2.1.) on peut également procéder par récurrence externe à partir du résultat précédent.

c) Supposons $\omega \not\prec p$. Il existe donc $s_0$, suite standard telle que $s_0(\omega) \geqslant p$. Soit $S$ un ensemble standard fini de suites d'entiers naturels. Par transfert la suite $t : n \longmapsto \max\{s(n)\,,\ s \in S\}$ est standard et donc $n \longmapsto t \circ t \circ \ldots \circ t(n)$ ($s_0(n)+1$ fois) aussi, et donc, en posant $x_0 = \omega$, $x_{k+1} = t(x_k)$, on a :

$$\forall^{s} s \in S\,,\ s(\omega) \leqslant x_1\,,\ s(x_1) \leqslant x_2\,, \cdots,\ s(x_{s_0(\omega)}) \leqslant \omega'\,,$$

et donc, compte tenu de $s_0(\omega) \geqslant p$, pour tout ensemble standard fini $S$ de suites d'entiers naturels, il existe une suite finie $(x_1, \cdots, x_p)$ d'entiers telle que

$$\forall^{s} s \in S\,,\ s(\omega) \leqslant x_1\,,\ s(x_1) \leqslant x_2\,, \cdots,\ s(x_p) \leqslant \omega'\,.$$

Par idéalisation on a alors le résultat voulu.

d) • Supposons $p \prec \omega'$. Soit $S$ un ensemble standard fini de suites d'entiers naturels. Par transfert la suite $t : n \longmapsto \max\{s(n)\,,\ s \in S\}$ est standard et donc l'application $(\xi, n) \longmapsto u(\xi, n) = t \circ t \circ \ldots \circ t(\xi)$ ($n+1$ fois) aussi. Or $\omega, p \prec \omega'$ donc $u(\omega, p) \leqslant \omega'$ d'après (exercice 4 question e). En posant $x_0 = \omega$, $x_{k+1} = t(x_k)$, on a donc : pour tout ensemble standard fini $S$ de suites d'entiers naturels, il existe une suite finie $(x_1, \cdots, x_p)$ d'entiers telle que

$$\forall^s s \in S \ , \ s(\omega) \leqslant x_1 \ , \ s(x_1) \leqslant x_2 \ , \cdots \ , \ s(x_p) \leqslant \omega' \ .$$

Par idéalisation on a alors le résultat voulu.

• Inversement, supposons $\omega \prec \omega_1 \prec \omega_2 \prec \cdots \prec \omega_p \prec \omega'$. Alors $\omega_i < \omega_{i+1}$ et par récurrence $p \leqslant \omega_p$ et donc $p \prec \omega'$.

**6.** a) La réflexivité et la transitivité sont évidentes. La symétrie provient du fait que le complémentaire d'une partie standard est standard par transfert, puisque $E$ l'est.

b) Si $x_0$ est standard alors $\{x_0\}$ est standard par transfert, donc $x_0$ est le seul élément de $E$ indiscernable de $x_0$.

c) • Soit $x_1$ à la fois standard et vérifiant $f(x_1) \neq x_1$ (un tel point existe par transfert). L'application $x \longmapsto g(x) = f(x)$ si $f(x) \neq x$, et $x_1$ sinon, est standard et n'a pas de point fixe.

• Appelons $g$-admissible un coloriage d'une partie de $E$ par au plus trois couleurs, tel que $x$ et $g(x)$ ne soient jamais de la même couleur. Il suffit de montrer qu'il existe un coloriage $g$-admissible de $E$, puisqu'alors il existera un tel coloriage standard par transfert. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples $(F, C)$ tels que $F$ soit une partie stable par $g$ et $C$ un coloriage $g$-admissible de $F$. On munit $\mathcal{E}$ d'une relation d'ordre en posant $(F, C) \leqslant (F', C') \iff$ « $F \subset F'$ et $C$ est le coloriage de $F$ induit par $C'$ ». L'ensemble ordonné $(\mathcal{E}, \leqslant)$ est clairement inductif, donc possède un élément maximal $(F_0, C_0)$ (Zorn). Alors $F_0 = E$. En effet, sinon il existerait $x_0 \in E \setminus F_0$, et $C_0$ se prolonge à un coloriage d'un ensemble contenant $F_0$ ainsi que $x_0$ et ses itérés par $g$ (distinguer trois cas selon que l'orbite future de $x_0$ rencontre $F_0$, est finie, ou est infinie et ne rencontre pas $F_0$).

• Un tel coloriage étant standard fini, toutes ses classes d'équivalence sont standard, et celle de $x_0$ ne contient pas $g(x_0) = f(x_0)$, et donc $x_0$ et $f(x_0)$ ne sont pas indiscernables.

d) Soit $\mathcal{P}$ un ensemble standard fini de parties de $E$ contenant $\omega$. L'intersection des éléments de $\mathcal{P}$ est un ensemble standard (par transfert) contenant un élément non standard (à savoir $\omega$) : cette intersection est donc infinie. Il existe donc une partie infinie de $E$ incluse dans tout élément de $\mathcal{P}$.

Par idéalisation, il existe une partie infinie de $E$ incluse dans toute partie standard de $E$ contenant $\omega$.

**7.** On commence par considérer $\mathcal{P} = {}^s\{X \in \mathcal{P}(E) \mid P(X)\}$. Les parties standard de $E$ vérifiant $P$ sont donc les éléments standard de $\mathcal{P}$.

Cela dit, supposons par l'absurde qu'aucun ensemble standard fini de parties de $E$ vérifiant $P$ ne recouvre $F$. On aurait alors :

$$\forall^s \mathcal{F} \text{ fini } \subset \mathcal{P} \, , \ \exists x \in F \ , \ \forall X \in \mathcal{F} \, , \ x \notin X \ .$$

D'après l'axiome d'idéalisation appliqué au prédicat

$$P(x, X) : x \in F \text{ et } (X \in \mathcal{P} \Longrightarrow x \notin X) \, ,$$

on a alors :

$$\exists x \in F\,,\ \forall^s X \in \mathcal{P}\,,\ x \notin X\,,$$

c'est-à-dire : il existe $x \in \mathcal{F}$ n'appartenant à aucune partie standard de $E$ vérifiant $P$ (contradiction).

Remarque : l'ensemble $\mathcal{P}$ nous a servi à remplacer, pour $X$ partie standard de $E$, le prédicat externe $P(X)$ par le prédicat interne avec paramètre « $X \in \mathcal{P}$ » pour pouvoir appliquer l'axiome d'idéalisation.

**8.** L'intersection étant définie, il existe au moins un ensemble standard $X_0$ vérifiant $P$, et alors $E \subset X_0$. Par un raisonnement similaire à celui de l'exercice 7, il existe un ensemble standard fini $\mathcal{F}$ d'ensembles vérifiant $P$ tel que $\bigcap \mathcal{F} \subset E$. Mais $\mathcal{F}$ étant standard fini chaque élément de $\mathcal{F}$ est standard, donc contient $E$, et donc $E \subset \bigcap \mathcal{F}$. Finalement $E = \bigcap \mathcal{F}$, et donc $E$ est standard par transfert puisque $\mathcal{F}$ l'est.

**9.** Supposons l'existence de $F$, ensemble des éléments standard de $E$ indiscernables de $\omega$. Alors $F$, intersection des parties standard de $E$ contenant $\omega$, est standard d'après l'exercice 8. Mais $F$ contient un élément non standard (à savoir $\omega$), donc $F$ est infini, donc non vide. Par transfert $F$ a donc un élément $a$ standard, donc non indiscernable de $\omega$, ce qui contredit le définition de $F$.

**10.** a) Tout élément $x$ standard appartient à $\{x\}$, standard fini, donc est de rang dénombrable. La réciproque est fausse : $X$ étant infini il possède une partie infinie dénombrable, et par transfert une partie $Y$ standard infinie dénombrable, et un élément non standard de $Y$ (il en existe car $Y$ est infini) est de rang dénombrable sans être standard.

b) Soit $\mathcal{F}$ un ensemble standard fini de parties dénombrables de $X$. La réunion des éléments de $\mathcal{F}$ étant dénombrable et $X$ ne l'étant pas il existe $x \in X$ qui n'appartient à aucun élément de $\mathcal{F}$. Le résultat en découle par idéalisation.

c) La réunion d'un ensemble fini de parties dénombrables contenant toutes les parties dénombrables standard est un ensemble dénombrable contenant tous les éléments de $X$ de rang dénombrable. Il n'existe pas de partie finie les contenant car $X$ possède une partie standard infinie dénombrable.

d) Une implication est évidente. Pour l'autre : si tous les éléments de $E$ sont de rang dénombrable alors $E$ possède un recouvrement par des parties standard dénombrables. Par idéalisation on peut en extraire un sous-recouvrement standard fini (*cf.* ex. 7), dont la réunion est un ensemble standard (par transfert) et dénombrable.

e) Supposons l'existence de $E$, ensemble des éléments de rang dénombrable de $X$. D'après d) $E$ est inclus dans un ensemble standard dénombrable, et, du coup, lui est égal. $X$ étant non dénombrable $X \setminus E$ est alors non vide, et donc, par tranfert, possède un élément standard, donc de rang dénombrable, ce qui contredit la définition de $E$.

## Exercices du chapitre 2.

**1.** Un ensemble universel (chap. 1, ex. 3) $E$ n'est jamais admissible. En effet, sinon il serait inclus dans un ensemble standard, auquel, du coup, appartiendraient tous les ensembles standard, et par transfert l'ensemble de tous les ensembles existerait, ce qui, c'est bien connu, n'est pas le cas.

**2.** Prenons $\omega$ un réel infiniment grand, $f$ la fonction caractéristique de $]-\infty, \omega]$, et $A = \mathbb{R}$. Alors ${}^s f$ est la fonction constante 1, et donc $({}^s f)({}^s A) = \{1\}$, mais $f(A) = \{0, 1\}$ et donc ${}^s(f(A)) = \{0, 1\}$.

**3.** Considérons, comme l'indique l'énoncé, $A = {}^s\{(x, y) \in E^2 \mid P(x, y)\}$. La condition sur $P$ s'écrit alors $\forall^s x \in E\,,\ \exists^s y \in E\,,\ (x, y) \in A$. Mais alors, $A$ étant standard, par transfert $\forall x \in E\,,\ \exists y \in E\,,\ (x, y) \in A$. Le prédicat « $(x, y) \in A$ » étant classique il existe, en utilisant l'axiome de choix, une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (u_n, u_{n+1}) \in A$. Par transfert il existe une telle suite standard. Mais alors par transfert pour $n$ standard $(u_n, u_{n+1})$ est standard, et, étant dans $A$, il vérifie $P$.

**4.** a) Evident.

b) • Supposons $x_0$ standard. Si $x \approx x_0$ alors $x$ est dans tout intervalle ouvert standard contenant $x_0$ donc en particulier dans tout intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ ($r > 0$ standard) et donc $x \simeq x_0$. Inversement, supposons $x \simeq x_0$, c'est-à-dire : $x$ est dans tout intervalle ouvert $]x_0 - r, x_0 + r[$ ($r > 0$ standard). Par transfert tout intervalle ouvert standard contenant $x_0$ contient un tel intervalle, et donc $x \approx x_0$.

• Soit $x_0$ limité non standard. Supposons pour fixer les idées $x_0^* < x_0$. Si $x \approx x_0$ alors $x$ est dans tout intervalle $]x_0^*, x_0 + r[$ ($r > 0$ standard). L'inverse est aussi vrai, puisque dans ce cas $x_0^*$ est le plus grand entier standard $< x_0$.

Conclusion : les entiers $x \approx x_0$ sont les entiers $x \simeq x_0$ tels que $x - x_0^*$ soit de même signe que $x_0 - x_0^*$.

• Soit $x_0$ infiniment grand. Alors $x \approx x_0$ si, et seulement si, $x$ est dans tout intervalle $]r, +\infty[$ ($r \in \mathbb{R}$ standard), c'est-à-dire si $x$ est infinimnt grand.

• La relation $\approx$ n'est donc pas symétrique, puisque si $\varepsilon > 0$ est infiniment petit alors $\varepsilon \approx 0$ mais $0 \not\approx \varepsilon$.

**5.** Soit $S$ un sous-ensemble standard fini de $I \times J$. Les projections $I_1$ et $J_1$ de $S$ sur $I$ et $J$ sont finies et standard par transfert, donc $I_1 \times J_1$ aussi, et donc $I_1 \times J_1 \subset E$. Il existe donc un produit cartésien fini inclus dans $E$ contenant tous les éléments de $S$. Par idéalisation, il existe un produit cartésien fini inclus dans $E$ contenant tous les couples standard de $I \times J$. Le résultat se généralise aisément à un produit cartésien de $n$ ensembles avec $n$ standard.

**6.** Posons $X = \{(i, j) \in I \times J \mid X_i \subset Y_j\}$. $X$ contient tous les couples standard $(i, j) \in I \times J$. D'après le principe de débordement (exercice 5), il existe une partie $I_1$ (resp. $J_1$) de $I$ (resp. $J$) contenant tous les éléments standard de $I$ (resp. $J$) telles que $I_1 \times J_1 \subset X$, c'est-à-dire $\forall i \in I_1\,,\ \forall j \in J_1\,,\ X_i \subset Y_j$. Il suffit alors de prendre $Z = \bigcup_{i \in I_1} X_i$. On peut aussi procéder directement par idéalisation.

**7.** On a $\forall^s x \in X\,,\ \forall^s y \in \mathbb{N}\,,\ \{y\} \subset [\![ 0, f(x) ]\!]$. D'après le principe de Fehrele (ex. 6), il existe un ensemble $Z$ contenant tous les entiers standard et inclus dans chaque $[\![ 0, f(x) ]\!]$ ($x$ standard). D'après le principe de Cauchy, $Z$ contient un élément entier grand, qui est donc dans chaque $[\![ 0, f(x) ]\!]$ ($x$ standard).

**8.** On a $\forall^s x \in E\,,\ \forall^s i \in I\,,\ \{x\} \subset E_i$. D'après le principe de Fehrele (ex. 6), il existe un ensemble $Z$ contenant tous les éléments standard de $X$ et inclus dans chaque $E_i$ ($i$ standard). D'après le principe de Cauchy, $Z$ contient un élément infiniment grand, qui est donc dans chaque $E_i$ ($i$ standard).

**9.** a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ standard, et $n \in \mathbb{N}$ standard. Pour $r > 0$ l'ensemble $]x_0, x_0 + r[$ est infini, et donc

$$\forall r > 0\,,\ \exists A \subset\, ]x_0, x_0 + r[ \text{ fini tel que } \operatorname{Card} A \geqslant n\,.$$

Par transfert,

$$\forall^s r > 0\,,\ \exists^s A \subset\, ]x_0, x_0 + r[ \text{ fini tel que } \operatorname{Card} A \geqslant n\,.$$

Un tel ensemble $A$ étant standard fini tous ses éléments sont standard et donc dans $E$, d'où

$$\forall^s r > 0\,,\ \exists A \subset\, ]x_0, x_0 + r[\ \cap E \text{ fini tel que } \operatorname{Card} A \geqslant n\,,$$

et d'après le principe de Cauchy c'est vrai pour un $r > 0$ infiniment petit.

b) Soit $A$ l'ensemble défini par

$$A = \{(x_0, r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N} \mid \text{ il existe } n \text{ points de } E \text{ à distance } < r \text{ de } x_0\}\,.$$

D'après a), l'ensemble $A$ contient tous les triplets $(x_0, r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N}$ standard. D'après le principe de débordement (ex. 5) généralisé à trois ensembles, $A$ contient un produit cartésien $U \times V \times W$ contenant tous les triplets $(x_0, r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{N}$ standard, et d'après le principe de Cauchy $V$ contient un réel $r > 0$ infiniment petit et $W$ un entier $n \in \mathbb{N}$ infiniment grand.

**10.** a) Soit $\alpha_0$ un ordinal standard vérifiant $P$. L'ensemble ${}^s\{\alpha \in [\![ 0, \alpha_0 ]\!] \mid P(\alpha)\}$ est un ensemble d'ordinaux non vide (car il contient $\alpha_0$). Il possède donc un plus petit élément, standard par transfert, qui est donc le plus petit ordinal standard vérifiant $P$.

b) Supposons qu'il existe un ordinal standard ne vérifiant pas $P$. Soit $\alpha_0$ le plus petit ordinal standard ne vérifiant pas $P$ (son existence découle de a). Tout ordinal standard $\beta < \alpha_0$ vérifie donc $P$. Mais alors d'après l'hypothèse faite sur $P$, $\alpha_0$ vérifie $P$, ce qui contredit la définition de $\alpha_0$.

c) Les hypothèses faites sur $P$ entraînent l'existence d'un ordinal standard vérifiant $P$. D'après a) il existe un plus petit ordinal standard $\alpha_0$ vérifiant $P$. Mais l'hypothèse (ii) entraîne que $\alpha_0$ est le plus petit ordinal vérifiant $P$.

**11.** a) • Il n'existe aucun élément de rang au plus $0$.

• Si $x \in X$ est standard alors $x \in \{x\}$ et ce dernier est standard par transfert, donc $x$ est de rang au plus 1 donc de rang au plus $c$ pour tout cardinal fini $c \neq 0$.

• Inversement, si $c$ est un cardinal fini et $x$ de rang au plus $c$ alors $x$ appartient à un ensemble standard fini donc $x$ est standard.

b) • La réunion d'un ensemble fini de parties de $X$ de cardinal au plus $c$ contenant toutes les parties standard de cardinal au plus $c$ est une partie de $X$ de cardinal au plus $c$ contenant tous les éléments de $X$ de rang au plus $c$.

• Il peut exister une partie de $X$ de cardinal $c' < c$ qui les contienne si $c > c_0$ (c'est évident) ou si le cardinal $c$ est non standard. En revanche si $c \leqslant c_0$

est standard un tel cardinal $c'$ n'existe pas : en effet, il existe une partie de $X$ de cardinal exactement $c$, et par transfert une partie standard de cardinal $c$, dont tous les éléments sont par conséquent de rang au plus $c$.

c) Une implication est évidente. Pour l'autre : si tous les éléments de $E$ sont de rang au plus $c$ alors $E$ possède un recouvrement par des parties standard de $X$ de cardinal au plus $c$. D'après (chap. 1, ex. 7) on peut en extraire un recouvrement standard fini, dont la réunion est un ensemble standard (par transfert) de cardinal au plus $c$.

d) Supposons l'existence de $E$, ensemble des éléments de $X$ de rang au plus $c$. D'après c) $E$ est inclus dans un ensemble standard de cardinal au plus $c$, et, du coup, lui est égal. $X$ étant de cardinal $c_0 > c$, $X \setminus E$ est non vide, et standard, donc par transfert contient un élément standard, donc de rang au plus $c$, ce qui contredit la définition de $E$.

e) Soit $P(\alpha)$ le prédicat « il existe une partie standard de $X$ de cardinal au plus $\aleph_\alpha$ contenant $x$ ». Alors pour tout ordinal $\alpha$ vérifiant $P$, il existe un ordinal standard $\beta \leqslant \alpha$ vérifiant $P$ (prendre une partie $Y$ standard de cardinal au plus $\aleph_\alpha$ contenant $x$, et $\beta$ tel que $\operatorname{Card} Y = \aleph_\beta$. Alors $\beta$ est standard par transfert). D'après l'exercice 10 c), il existe un plus petit ordinal $\beta$ tel que $P(\beta)$, c'est-à-dire tel que $x$ soit de rang au plus $\aleph_\beta$.

f) D'après 10 c) et 10 a), $\operatorname{rg} x$ est standard. Inversement, si $c \leqslant c_0$ est un cardinal infini standard, il existe une partie de $X$ de cardinal $c$, et par transfert une partie standard $Y$ de cardinal $c$. Il reste à voir qu'il existe $x \in Y$ dont le rang est exactement $c$. Il suffit de considérer un ensemble fini de parties de cardinal $< c$ contenant toutes les parties standard de cardinal $< c$. La réunion des éléments de cet ensemble contient tous les éléments de rang $< c$, et étant de cardinal $< c$ elle ne contient pas $Y$.

g) Supposons l'existence de $E$, ensemble des éléments de $X$ de rang $c$. Par le même genre de raisonnement qu'en c) $E$ est inclus dans un ensemble standard de cardinal exactement $c$, et, du coup, lui est égal. $X$ étant de cardinal $c_0 > c$, $X \setminus E$ est non vide, et standard, donc par transfert contient un élément standard, donc de rang au plus $c$, ce qui contredit la définition de $E$.

**12.** Soit $c_0 = \operatorname{Card}(E)$. D'apès l'ex. précédent, il existe un élément $\omega$ de $E$ de rang $c_0$. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble standard fini de parties de $E$ de cardinal $c_0$ et contenant $\omega$. L'intersection des éléments de $\mathcal{P}$ est un ensemble standard (par transfert) contenant $\omega$ : par définition du rang, cette intersection a donc pour cardinal $c_0$. Il existe donc une partie de $E$ de cardinal $c_0$ incluse dans tout élément de $\mathcal{P}$.

Par idéalisation, il existe une partie de $E$ de cardinal $c_0$ incluse dans toute partie standard de $E$ contenant $\omega$.

## Exercices du chapitre 3.

**1.** a) Evident.

b) Si $x \simeq y$ tout voisinage standard de $y$, et donc tout ouvert standard contenant $y$, contient $x$. Inversement, supposons que tout ouvert standard contenant $y$ contienne $x$. Soit $V$ un voisinage standard de $y$. Par transfert $\overset{\circ}{V}$ est standard. Or c'est un ouvert contenant $y$, et donc il contient $x$, et donc $V$ aussi d'où $x \simeq y$. La transitivité de $\simeq$ en découle de façon évidente.

c) Les complémentaires des parties finies standard sont des voisinages de $\omega$. Inversement, comme tout voisinage de $\omega$ contient une demi-droite (à savoir $[\![\omega, +\infty[\![$), par transfert tout voisinage standard contient une demi-droite standard, donc de la forme $[\![a, +\infty[\![$ avec $a$ standard, et le complémentaire est standard fini. Les points $x \simeq \omega$ sont donc tous les infiniments grands. En revanche, $\mathbb{N}$ est le seul ouvert contenant $\omega - 1$, et par conséquent tout entier est infiniment proche de $\omega - 1$. La relation $\simeq$ n'est donc pas transitive, puisque $0 \simeq \omega - 1$, $\omega - 1 \simeq \omega$, mais $0 \not\simeq \omega$.

d) Si $\varepsilon > 0$ est un réel infiniment petit, alors $\varepsilon \simeq 0$ (aussi bien au sens métrique que topologique car $0$ est standard) mais $0 \not\simeq \varepsilon$ car $]0, +\infty[$ est un voisinage standard de $\varepsilon$ ne contenant pas $0$.

**2.** Soit $\mathcal{P}$ un ensemble standard fini de parties de $\mathbb{R}$ contenant $\omega$. L'intersection des éléments de $\mathcal{P}$ est un ensemble standard (par transfert) non majoré (sinon elle aurait un majorant standard par transfert et ne pourrait contenir $\omega$). Il existe donc une partie non majorée de $\mathbb{R}$ incluse dans tout élément de $\mathcal{P}$.

Par idéalisation, il existe une partie non majorée de $\mathbb{R}$ incluse dans toute partie standard de $\mathbb{R}$ contenant $\omega$.

**3.** a) • $\omega' - \omega = \dfrac{1}{\omega} \simeq 0$ donc $\omega' \simeq \omega$ au sens métrique.

• $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] n - \frac{1}{2n}, n + \frac{1}{2n} \right[$ est un voisinage standard de $\omega$ ne contenant pas $\omega'$.

Par conséquent, ce dernier n'est pas infiniment proche de $\omega$ au sens topologique.

b) Soit $\omega'' = \omega + \dfrac{1}{\omega'}$, et supposons par l'absurde que $\omega''$ ne soit pas infiniment proche de $\omega$ au sens topologique. Il existe donc un voisinage standard de $\omega$, et par conséquent un ouvert standard $U$ contenant $\omega$ (cf. ex. 1 b), ne contenant pas $\omega''$. Nous allons construire une suite standard $s$ d'entiers naturels telle que $\omega' < s(\omega)$, ce qui contredira le fait que $\omega'$ est $\omega$-inaccessible.

Soit $f$ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante : si $n \in U$ et si la composante connexe de $U$ contenant $n$ est majorée alors $f(n)$ est la borne supérieure de cette composante connexe. Sinon, $f(n) = n + 1$. Notons qu'on a toujours $f(n) > n$. D'autre part l'application $f$ est standard par transfert puisque $U$ l'est, et $f(\omega) \leqslant \omega''$, c'est-à-dire $f(\omega) - \omega \leqslant \dfrac{1}{\omega'}$. Il suffit alors de prendre $s(n) = E\left(\dfrac{1}{f(n) - n}\right) + 1$.

**4.** • Supposons $X$ et $E$ standard. Soit $U$ une partie de $E$. Par transfert, le prédicat « $U$ est standard et $U$ est la trace sur $E$ d'un ouvert $X$ » équivaut à « $U$ est la trace sur $E$ d'un ouvert standard de $X$ ». Par conséquent, $x \simeq x_0$ dans $E$ si, et seulement si, $x \simeq x_0$ dans $X$.

• Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, soit $\varepsilon > 0$ infiniment petit, et $E = \{0, \varepsilon\}$. Alors $\varepsilon \simeq 0$ dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $E$ car $E$ étant discret $\{0\}$ est un voisinage standard de $0$ dans $E$.

• Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, soit $\varepsilon > 0$ infiniment petit, et

$E = \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon\}$. Alors tout élément de $E$ est infiniment proche de $0$ pour la topologie induite ! En effet, il n'y a aucun ouvert pour la topologie induite sur $E$ qui soit standard et qui contienne $0$ : un tel ouvert $U$ contient par transfert un intervalle ouvert contenant $0$, lequel, toujours par transfert, contient un réel $> 0$ standard donc $\varepsilon$ puisque c'est un intervalle, ce qui contredit $U \subset E$.

• Soit $\varepsilon > 0$ infiniment petit. Dans $\mathbb{R} \setminus \{\varepsilon\}$ muni de sa topologie usuelle, soit $E = \{0, 1\}$. Alors $1 \simeq 0$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\varepsilon\}$ (voir le point précédent) mais pas dans $E$.

**5.** a) L'ensemble des voisinages de $x_0$ contenant $E$ contient tous les voisinages standard de $x_0$ donc aussi un micro-voisinage par principe de permanence.

b) Appliquer cette fois le principe de permanence à $\{V \in \mathcal{V}(x_0) \mid V \not\subset E\}$.

c) Appliquer le principe de permanence à $\{V \in \mathcal{V}(x_0) \mid V \cap E = \varnothing\}$.

**6.** Soit $E = \{(n, V) \in \mathbb{N} \times \mathcal{V}(x_0) \mid \forall p \leqslant n\,,\ u_p \in V\}$. Alors $E$ contient tous les couples standard de $\mathbb{N} \times \mathcal{V}(x_0)$ et donc, par principe de débordement (chap. 2 ex.5) il contient un produit cartésien $I \times J$ contenant tous ces couples standard. Mais par principe de permanence $I$ contient un entier infiniment grand et $J$ un micro-voisinage de $x_0$.

**7.** Soit $E = \{(a, V) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}(y_0) \mid f([-a, a]) \subset V\}$. Alors $E$ contient tous les couples standard de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}(y_0)$ et donc, par principe de débordement (chap. 2 ex.5) il contient un produit cartésien $I \times J$ contenant tous ces couples standard. Mais par principe de permanence $I$ contient un entier infiniment grand $\omega$ et $J$ un micro-voisinage de $y_0$.

**8.** Soit $E = \{(V, V') \in \mathcal{V}(x_0) \times \mathcal{V}(y_0) \mid f(X \setminus V) \subset V'\}$. Alors $E$ contient tous les couples standard de $\mathcal{V}(x_0) \times \mathcal{V}(y_0)$ et donc, par principe de débordement (chap. 2 ex.5) il contient un produit cartésien $I \times J$ contenant tous ces couples standard. Mais par principe de permanence $I$ contient un micro-voisinage de $x_0$ et $J$ un micro-voisinage de $y_0$.

**9.** Nous allons même montrer qu'il n'existe aucun sous-ensemble $E$ de $X$ vérifiant les propriétés suivantes :
- tout élément standard de $X$ est dans $E$.
- tout élément de $E$ est presque-standard.

Supposons par l'absurde l'existence d'un tel ensemble $E$. L'espace $X$ n'étant pas quasistandard, il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de $X$, que l'on peut choisir standard par transfert, n'admettant pas de sous-recouvrement fini. Pour tout $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ standard, il existe par transfert un point standard, et donc dans $E$, non recouvert par $\mathcal{U}'$. Par idéalisation, il existe un point $x$ de $E$ n'appartenant à aucun ouvert standard de $\mathcal{U}$. Mais $x$ étant dans $E$ il est presque-standard, donc infiniment proche d'un point standard $x_0$, lequel est dans un ouvert standard $U \in \mathcal{U}$ par transfert, puisque $\mathcal{U}$ recouvre $X$, et dans ce cas $x \in U$ puisque $x \simeq x_0$, ce qui constitue une contradiction.

## Exercices du chapitre 4.

**1.** a) Nous allon montrer qu'il n'existe aucun sous-ensemble $E$ de $X$ vérifiant les propriétés suivantes :

- tout élément standard de $X$ est dans $E$.
- tout élément de $E$ est limité.

Supposons par l'absurde l'existence d'un tel ensemble $E$. L'espace $X$ n'étant pas borné, il est non vide et par transfert contient un point standard $a$. Pour tout réel $r > 0$ standard, il existe un point $x$ tels que $d(a,x) > r$ puisque $X$ n'est pas borné. Par transfert il existe un tel $x$ standard, donc dans $E$. Par idéalisation, il existe un point de $E$ à distance infiniment grande de $a$, ce qui contredit le fait que tout élément de $E$ est limité.

b) Nous allon montrer qu'il n'existe aucun sous-ensemble $E$ de $X$ vérifiant les propriétés suivantes :

- tout élément standard de $X$ est dans $E$.
- tout élément de $E$ est quasistandard.

Supposons par l'absurde l'existence d'un tel ensemble $E$. L'espace $X$ n'étant pas précompact, il existe $\varepsilon > 0$, que l'on peut choisir standard par transfert, tel que $X$ ne soit pas recouvrable par un nobre fini de boules de rayon $\varepsilon$. Par tranfert, pour tout ensemble standard fini de telles boules, il existe un point standard, donc dans $E$, non recouvert par cet ensemble. Par idéalisation, il existe un élément de $E$ qui n'est dans aucune boule standard de rayon $\varepsilon$. Mais ce point n'est alors pas quasistandard, ce qui contredit la définition de $E$.

## BIBLIOGRAPHIE


**Livres.**

[B] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques, Topologie générale.* Masson.

[D] M. Davis, *Applied Nonstandard Analysis.* Wiley, 1977.

[L] R. Lutz, M. Goze, *Nonstandard Analysis.* Springer, 1981.

[LUX] W.A.J. Luxemburg, *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability.* Holt-Rinehart-Winston, 1969.

[R] A. Robinson, *Nonstandard Analysis.* North-Holland, 1966.

[ROB] A. Robert, *Analyse Non Standard.* Presses Polytechniques Romandes, 1985.

[RU] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.* Masson, 1978.

[VIC] Victoria Symposium on Nonstandard Analysis, Masson, 1978.

**Articles.**

[LO] P.A. Loeb, A nonstandard representation of Borel Measures and $\sigma$-finite measures. In : [VIC].

[N] E. Nelson, Internal Set Theory : a new approach to Nonstandard Analysis. In : *Bull. A.M.S.,* nov. 1977.

[T] R. F. Taylor, On Some Properties of Bounded Internal Functions. In : [LUX], p. 167-170.