

Exercice

Calculabilité de $\cos(\pi/257)$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier de la forme $2^n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{2i\pi/p}$, et $\mathbb{Q}[\omega] = \{P(\omega), P \in \mathbb{Q}[X]\}$.

1. Montrer que le polynôme $\sum_{k=0}^{p-1} X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[\omega]$ est un sous-corps de \mathbb{C} .
3. Montrer que le groupe G des automorphismes du corps $\mathbb{Q}[\omega]$ est isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
4. Montrer que G est un groupe cyclique.
5. Montrer qu'il existe une suite finie de sous-corps de \mathbb{C}

$$\mathbb{Q}[\omega] = K_n \supset K_{n-1} \cdots \supset K_0$$

où toutes les inclusions sont strictes et telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, tout élément de K_{i+1} soit racine d'un polynôme du second degré à coefficients dans K_i .

6. Montrer que $K_0 = \mathbb{Q}$.
7. Montrer que $\cos(\pi/p) \in \mathbb{Q}[\omega]$.
8. Dédurre de tout ce qui précède que $\cos(\pi/257)$ est calculable par radicaux.