

Caractérisation des moments d'inertie d'un système matériel ¹

Paul BARBAROUX

1. Introduction.

Dans un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension $n \geq 3$, dont l'e.v. associé sera noté E , définissons un *système matériel* \mathcal{S} par la donnée d'une mesure réelle ρ (« distribution de masse ») bornée, à support compact, de signe quelconque, sur E . Le moment d'inertie

$$I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{E}} d(m, \mathcal{F})^2 d\rho(m)$$

du système \mathcal{S} par rapport à un sous-espace affine \mathcal{F} vérifie les deux propriétés bien connues suivantes :

(i) Additivité perpendiculaire : $I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) + I_{\mathcal{S}}(\mathcal{G})$ dès que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont perpendiculaires (i.e. $\mathcal{F}^{\perp} \perp \mathcal{G}^{\perp}$).

(ii) Théorème de Huygens : Pour $x \perp \mathcal{F}$, on a, en notant M la masse totale de \mathcal{S} ,

a) Si $M \neq 0$, et si \mathcal{F} passe par le centre d'inertie de \mathcal{S} , alors $I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}+x) = I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) + M\|x\|^2$;

b) Si $M = 0$, le vecteur $a = \int_{\mathcal{E}} \overrightarrow{Am} d\rho(m)$ ne dépend pas du point A , et

$$I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F} + x) = I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) - 2(a | x).$$

Inversement, nous caractérisons ici les fonctions réelles g sur l'ensemble des sous-espaces affines de \mathcal{E} pour lesquelles il existe un système \mathcal{S} tel que $g = I_{\mathcal{S}}$. Nous verrons qu'en dehors de conditions assurant la continuité de g pour la topologie grassmannienne, la seule condition géométrique à imposer est la propriété d'additivité perpendiculaire, laquelle « contient » donc, d'une certaine manière, le théorème de Huygens. Ce résultat est en quelque sorte la version affine du théorème de Gleason [1]. Nous montrons également que l'on peut toujours prendre pour \mathcal{S} un ensemble fini de masses ponctuelles, dont nous exprimons le nombre minimal en termes géométriques, et nous déterminons un tel ensemble de cardinal minimal en appliquant le théorème de Witt à une forme quadratique convenable dans un espace de dimension au plus $n + 1$.

2. Etude préliminaire : le cas vectoriel.

Le lemme 1. permet de définir la « forme quadratique d'inertie duale » d'un système matériel \mathcal{S} au point O :

¹ Pour la dernière version de cet article : <http://paul.barbaroux.free.fr>

Une version abrégée a fait l'objet d'une note aux C.R.A.S.

Référence : **C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1067-1070**

(Note présentée par Alain Connes)

LEMME 1. – Soient \mathcal{S} un système matériel, et $O \in \mathcal{E}$. L'application

$$x \longmapsto q(x) = \|x\|^2 I_{\mathcal{S}}(O + x^\perp)$$

est une forme quadratique, et pour tout sous-espace vectoriel F de E , $I_{\mathcal{S}}(O + F) = \text{tr}(q|_{F^\perp})$.

DÉMONSTRATION. – On a

$$q(x) = \|x\|^2 I_{\mathcal{S}}(O + x^\perp) = \|x\|^2 \int_{\mathcal{E}} d(m, O + x^\perp)^2 d\rho(m) = \int_{\mathcal{E}} (\overrightarrow{Om} | x)^2 d\rho(m),$$

donc q est la forme quadratique provenant de la forme bilinéaire B définie par

$$B(x, y) = \int_{\mathcal{E}} (\overrightarrow{Om} | x)(\overrightarrow{Om} | y) d\rho(m).$$

En outre, pour F s.e.v. de E , en notant (e_i) une base orthonormale de F^\perp , la propriété d'additivité perpendiculaire donne

$$I_{\mathcal{S}}(O + F) = \sum_i I_{\mathcal{S}}(O + e_i^\perp) = \sum_i q(e_i) = \text{tr}(q|_{F^\perp}). \quad \square$$

Remarquons que toute forme quadratique q sur E provient de cette façon d'un système matériel. En effet, en considérant une base (e_i) de E à la fois orthonormale et q -orthogonale, on a $q(x) = \sum_i q(e_i)(e_i | x)^2$, de sorte qu'en prenant pour \mathcal{S} le système obtenu en plaçant en chaque point $O + e_i$ une masse ponctuelle m_i égale à $q(e_i)$, on a $q(x) = \|x\|^2 I_{\mathcal{S}}(O + x^\perp)$.

Le théorème de Gleason, dans le cas particulier d'un espace euclidien E de dimension finie, affirme que pour toute « mesure » μ (fonction réelle définie sur l'ensemble des s.e.v. de E , orthogonalement additive) bornée, il existe une forme quadratique q telle que $\mu(F) = \text{tr}(q|_F)$. En passant à l'orthogonal on obtient :

THÉORÈME 1. – Soient h une application à valeurs réelles, définie sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E , et O un point de \mathcal{E} . On suppose que l'application h est bornée et qu'elle vérifie la propriété d'additivité perpendiculaire. Alors il existe un système matériel \mathcal{S} tel que, pour tout sous-espace vectoriel F de E , on ait : $h(F) = I_{\mathcal{S}}(O + F)$.

Remarques. – 1. Comme pour le théorème de Gleason, pour E de dimension 2 le résultat tombe en défaut : étant donnée (i, j) base orthonormale de E , posons $u_\theta = (\cos \theta) i + (\sin \theta) j$. Soit f une fonction π -périodique bornée sur \mathbb{R} telle que $f(x + \pi/2) + f(x)$ soit égale à la constante λ . La fonction h définie par $h(\mathbb{R}u_\theta) = f(\theta)$, $h(\{0\}) = \lambda$, et $h(E) = 0$, vérifie les hypothèses du théorème mais ne provient pas en général d'un système matériel.

2. L'hypothèse « h bornée » est, elle aussi, essentielle, comme le montre l'exemple obtenu en considérant $h : F \longmapsto \varphi(I_{\mathcal{S}}(O + F))$, où \mathcal{S} est constitué d'une seule masse ponctuelle non nulle placée ailleurs qu'en O et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application \mathbb{Q} -linéaire non continue arbitraire.

3. Solution du problème affine général.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. – Soit h une application réelle définie sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels (resp. affines) de E (resp. \mathcal{E}). Un sous-espace \mathcal{F} sera dit *total* pour h s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Pour tout sous-espace \mathcal{G} contenant \mathcal{F} , $h(\mathcal{G}) = 0$;

(ii) Pour tout sous-espace \mathcal{G} et toute isométrie vectorielle (resp. affine) Φ fixant chaque point de \mathcal{F} , on a $h(\Phi(\mathcal{G})) = h(\mathcal{G})$.

On appellera *rang* de h , et on notera $\text{rg } h$, la plus petite dimension d'un sous-espace total pour h . On remarquera que si h a la propriété d'additivité perpendiculaire, alors l'espace entier est total pour h , de sorte que le rang de h est bien défini.

Dans le cas d'une application g définie sur l'ensemble des sous-espaces affines de \mathcal{E} , on notera pour simplifier $g(M)$ au lieu de $g(\{M\})$, et l'application définie sur \mathcal{E} induite par g sera notée g_0 . Pour $A \in \mathcal{E}$, on notera g^A la restriction de g à l'ensemble des sous-espaces affines passant par A .

THÉORÈME 2. – *Soit g une application définie sur l'ensemble des sous-espaces affines de \mathcal{E} , à valeurs réelles. Il existe un système matériel \mathcal{S} tel que $g = I_{\mathcal{S}}$ si, et seulement si, l'application g vérifie les trois conditions suivantes : (i) g_0 est bornée au voisinage d'un point ; (ii) il existe un point B tel que g^B soit bornée ; (iii) g possède la propriété d'additivité perpendiculaire. De plus, lorsque ces conditions sont satisfaites, on peut prendre pour \mathcal{S} un ensemble fini de masses ponctuelles, dont le nombre minimal est $(\text{rg } g) + 1$ si g_0 n'est pas constante, $(\text{rg } g) + 2$ si g_0 est constante et g non identiquement nulle, et 0 si $g = 0$.*

Remarque. – Il résultera de la démonstration, ainsi que du théorème de Huygens, que les quatre cas suivants, correspondant à quatre types de systèmes, décrivent toutes les situations possibles :

a) $g_0(O + x) = g_0(O) + M\|x\|^2$ ($M \neq 0$) : système de masse totale $M \neq 0$;

b) $g_0(O + x) = (a | x)$ ($a \neq 0$) : système vérifiant $M = 0$ et $a = -2 \int_{\mathcal{E}} \overrightarrow{Am} d\rho(m) \neq 0$.

C'est le cas, par exemple, d'un système de deux masses non nulles opposées placées en deux points distincts, ou bien de deux masses de valeur 1 et une masse de valeur -2 , non placée au milieu ;

c) Cas trivial $g = 0$. Il suffit pour cela (voir lemme 3.) que g_0 soit constante et qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $g^A = 0$. C'est le cas d'un système vérifiant $M = 0$, $a = 0$, moments d'inertie nuls par rapport aux sous-espaces passant par un point donné. Par exemple, le système de six masses valant 1, -2 , 1, 1, -2 , 1, placées sur une droite aux abscisses -7 , -5 , -1 , 1, 5, 7, n'a aucune inertie.

d) g_0 constante mais $g \neq 0$: système vérifiant $M = 0$, $a = 0$, au moins un moment d'inertie non nul. Par exemple, le système \mathcal{S} constitué de $2n + 1$ masses ponctuelles obtenu en plaçant, en chaque point $O \pm e_i$ ($O \in \mathcal{E}$, (e_i) base orthonormale de \mathcal{E}), une masse de valeur $1/2$, et en O une masse de valeur $-n$, vérifie $I_{\mathcal{S}}(\mathcal{F}) = \text{codim } \mathcal{F}$ et se réduit, en vertu du théorème, à $n + 2$ masses (dont $n + 1$ sont placées, pour des raisons de symétrie, aux sommets d'un simplexe régulier).

Il résultera également de la démonstration que dans le cas où g est positive (ce qui

ne peut arriver que dans les cas a, c, d) toutes les masses, sauf une dans le cas d, peuvent être prises positives.

LEMME 2. – Soit q une forme quadratique sur E , et posons $h(F) = \text{tr}(q|_{F^\perp})$. Alors un sous-espace vectoriel F de E est total pour h si, et seulement si, il contient $(\text{Ker } q)^\perp$.

DÉMONSTRATION. – Avec les notations du lemme, on a, en notant B la forme bilinéaire polaire de la forme quadratique q , les équivalences suivantes :

F est total pour h

$$\begin{aligned}
&\iff \begin{cases} \forall G \text{ sev de } E, F \subset G \implies \text{tr}(q|_{G^\perp}) = 0 \\ \forall G \text{ sev de } E, \forall \Phi \text{ isométrie fixant chaque point de } F, \text{tr}(q|_{(\Phi(G))^\perp}) = \text{tr}(q|_{G^\perp}) \end{cases} \\
&\quad (\text{par définition d'un s.e.v. total}) \\
&\iff \begin{cases} \forall G \text{ sev de } E, G \subset F^\perp \implies \text{tr}(q|_G) = 0 \\ \forall G \text{ sev de } E, \forall \Phi \text{ isométrie fixant chaque point de } F, \text{tr}(q|_{\Phi(G)}) = \text{tr}(q|_G) \end{cases} \\
&\quad (\text{car } (\Phi(G))^\perp = \Phi((G)^\perp)) \\
&\iff \begin{cases} q|_{F^\perp} = 0 \quad (q \text{ est nulle ssi } \forall G, \text{tr}(q|_G) = 0) \\ \forall x \in E, \forall \Phi \text{ isométrie fixant chaque point de } F, q(\Phi(x)) = q(x) \end{cases} \\
&\quad (\text{car } (e_i) \text{ base orthonormale de } G \implies (\Phi(e_i)) \text{ base orthonormale de } \Phi(G)) \\
&\iff \begin{cases} q|_{F^\perp} = 0 \\ \forall x \in E, \forall H \text{ hyperplan de } E, q(s_H(x)) = q(x) \end{cases} \\
&\quad (\text{toute isométrie fixant chaque point de } F \text{ est produit de réflexions orthogonales} \\
&\quad \text{par rapport à des hyperplans contenant } F) \\
&\iff \begin{cases} q|_{F^\perp} = 0 \\ \forall x \in E, \forall H \text{ hyperplan de } E, B(x + s_H(x), x - s_H(x)) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} q|_{F^\perp} = 0 \\ \forall y \in F^\perp, \forall x \perp y, B(x, y) = 0 \end{cases} \\
&\iff F^\perp \subset \text{Ker } q \\
&\iff F \supset (\text{Ker } q)^\perp.
\end{aligned}$$

□

LEMME 3. – Soit g une application définie sur l'ensemble des sous-espaces affines de \mathcal{E} , vérifiant la propriété d'additivité perpendiculaire. Pour tout vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ et tous sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} inclus dans un même hyperplan \mathcal{H} orthogonal à x , on a :

$$g(\mathcal{F} + x) - g(\mathcal{F}) = g(\mathcal{G} + x) - g(\mathcal{G}).$$

DÉMONSTRATION. – On a $g(\mathcal{F} + \mathbb{R}x) + g(\mathcal{H}) = g(\mathcal{F})$ puisque $\mathcal{F} + \mathbb{R}x$ et \mathcal{H} sont perpendiculaires d'intersection \mathcal{F} , d'où $g(\mathcal{F}) - g(\mathcal{H}) = g(\mathcal{F} + \mathbb{R}x) = g(\mathcal{F} + x + \mathbb{R}x) = g(\mathcal{F} + x) - g(\mathcal{H} + x)$, et le résultat s'obtient remplaçant \mathcal{F} par \mathcal{G} dans la relation précédente et en soustrayant. □

LEMME 4. – Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel X de dimension finie. Si $u \notin \text{Ker } Q$, alors il existe une base Q -orthogonale (ε_i) telle que $u = \sum \varepsilon_i$.

DÉMONSTRATION. – Quitte à considérer $X/\text{Ker } Q$, on peut se placer dans le cas Q non dégénérée, $u \neq 0$. On commence par exhiber une base Q -orthogonale (η_i) telle que

$$\sum Q(\eta_i) = Q(u) :$$

Soit (ξ_i) une base Q -orthogonale arbitraire. Si u est isotrope, la forme Q n'étant pas dégénérée $\exists i, j, Q(\xi_i)Q(\xi_j) < 0$, et on peut toujours multiplier ξ_i ou ξ_j par un réel $\lambda > 0$ de sorte à obtenir une base (η_i) vérifiant $\sum Q(\eta_i) = 0 = Q(u)$. Sinon, on peut supposer $Q(u) > 0$, et alors $I = \{i \mid Q(\xi_i) > 0\} \neq \emptyset$. Définissons (η_i) par $\eta_i = \lambda \xi_i$ si $i \in I$, et $\eta_i = \xi_i$ sinon. Alors $\sum Q(\eta_i) = Q(u)$ s'écrit $\lambda^2 \sum_{i \in I} Q(\xi_i) + \sum_{i \notin I} Q(\xi_i) = Q(u)$, équation qui admet une solution $\lambda \neq 0$.

On utilise alors le théorème de Witt : si $Q(u) = Q(v)$ il existe une Q -isométrie φ de X telle que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Il suffit de l'appliquer à $v = \sum \eta_i$ et de prendre $\varepsilon_i = \varphi(\eta_i)$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. – Les conditions sont clairement nécessaires. De plus le nombre de masses annoncé ne peut être amélioré : un système \mathcal{S} de k masses ($k \geq 1$) engendre un sous-espace affine de dimension au plus $k - 1$, total pour $g = I_{\mathcal{S}}$, ce qui donne $k \geq \text{rg}(g) + 1$. Si, de plus, g_0 est constante et g non identiquement nulle, alors la masse totale est nulle et l'une des masses est non nulle, et le cas b) du théorème de Huygens montre alors que les places des masses ponctuelles sont affinement dépendantes, d'où $k \geq \text{rg}(g) + 2$.

Inversement, soit g vérifiant (i), (ii) et (iii). Soit $A \in \mathcal{E}$ au voisinage duquel g_0 est bornée et posons, pour $x \in E$, $\varphi(x) = g(A + x) - g(A)$. Pour $x, y \in E$, d'après le lemme 3. on a alors, dès que $x \perp y$, $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$. Or φ est bornée au voisinage de 0 puisque g_0 l'est au voisinage de A . Il existe alors $(M, a) \in \mathbb{R} \times E$ tel que

$$\forall x \in E, g(A + x) - g(A) = \varphi(x) = M\|x\|^2 + (a | x)$$

(voir p. ex. [2]). L'application g_0 est donc une forme quadratique affine, et

$$\forall P \in \mathcal{E}, \exists b \in E, \forall x \in E, g(P + x) - g(P) = M\|x\|^2 + (b | x). \quad (1)$$

Soit \mathcal{F}_0 un sous-espace total pour g de dimension minimale, égale à $\text{rg } g$, et F_0 sa direction.

1er cas : g_0 n'est pas une forme affine. – Quitte à changer g en $-g$, on peut supposer $M > 0$. L'application g atteint alors un minimum global, en un point, que l'on notera O , vérifiant

$$\forall x \in E, g(O + x) - g(O) = M\|x\|^2. \quad (2)$$

Soit $B \in \mathcal{E}$ tel que g^B soit bornée. En appliquant la relation (1) au point B et en utilisant le lemme 3., g^P est bornée pour tout point P . En particulier, g^O est bornée. D'après le théorème 1., il existe une forme quadratique q et un système matériel \mathcal{S} tels que pour tout sous-espace vectoriel F , $g(O + F) = \text{tr}(q|_{F^\perp}) = I_{\mathcal{S}}(O + F)$. D'après la relation (2), le lemme 3., et le théorème de Huygens, il reste à voir que l'on peut imposer que la masse du système soit M et que son centre d'inertie soit en O , tout en conservant les moments d'inertie par rapport aux sous-espaces passant par O , en utilisant

seulement $(\operatorname{rg} g) + 1$ masses ponctuelles. Pour cela, considérons la forme quadratique Q définie sur $E \times \mathbb{R}$ par $Q(x, t) = q(x) + M t^2$. Le vecteur $u = (0, 1)$ n'est pas dans $\operatorname{Ker} Q$ puisque $Q(u) = M > 0$. D'après le lemme 4., il existe une base Q -orthogonale (ε_i) telle que $u = \sum \varepsilon_i$, c'est-à-dire $\varepsilon_i^*(u) = 1$. Or, chaque forme linéaire ε_i^* est de la forme $\varepsilon_i^*(x, t) = (a_i | x) + \lambda_i t$, où $(a_i, \lambda_i) \in E \times \mathbb{R}$. Alors $\varepsilon_i^*(u) = 1$ s'écrit $\lambda_i = 1$, d'où, pour tout $(x, t) \in E \times \mathbb{R}$,

$$q(x) + M t^2 = Q(x, t) = \sum_{i=1}^{n+1} Q(\varepsilon_i)(\varepsilon_i^*)^2(x, t) = \sum_{i=1}^{n+1} Q(\varepsilon_i)((a_i | x) + t)^2.$$

En posant $m_i = Q(\varepsilon_i)$ et en développant le carré, un argument immédiat permet d'identifier :

$$\text{a) } q(x) = \sum m_i (a_i | x)^2; \quad \text{b) } \sum m_i a_i = 0; \quad \text{c) } \sum m_i = M.$$

Il suffit alors de considérer le système S' , obtenu en plaçant, pour chaque i tel que $m_i \neq 0$, la masse m_i en $O + a_i$. En utilisant la relation (2) et le fait que \mathcal{F}_0 est total, ce dernier contient O (considérer le symétrique orthogonal de O par rapport à \mathcal{F}_0), et sa direction F_0 est alors totale pour $F \mapsto g(O + F)$. D'après le lemme 2. $(\operatorname{Ker} q)^\perp \subset F_0$, et le nombre de masses ponctuelles utilisées est alors $r = \operatorname{rg} Q = (\operatorname{rg} q) + 1 \leq (\dim \mathcal{F}_0) + 1 = (\operatorname{rg} g) + 1$.

2ème cas : g_0 est une forme affine. – Cette fois il existe $a \in E$ tel que

$$\forall P \in \mathcal{E}, \quad \forall x \in E, \quad g(P + x) - g(P) = (a | x). \quad (3)$$

• Si $a \neq 0$, on se place en un point $O \in \mathcal{F}_0$ pour l'instant arbitraire, et l'on pose $Q(x, t) = q(x) - 2(a | x)t$. Alors $(0, 1)$ n'est toujours pas dans $\operatorname{Ker} Q$ car $a \neq 0$. On obtient cette fois :

$$\text{a) } q(x) = \sum m_i (a_i | x)^2; \quad \text{b) } \sum m_i a_i = -a; \quad \text{c) } \sum m_i = 0,$$

et c'est le cas b) du théorème de Huygens qui permet alors de conclure. Pour le nombre de masses utilisées, a priori, $\operatorname{rg} Q \leq (\operatorname{rg} q) + 2$. Mais en notant q_O la forme quadratique associée à g au point O , la relation (3), l'égalité $q_O(x) = \|x\|^2 g(O + x^\perp)$ et le lemme 3 donnent, pour $b \in E$,

$$q_{O+b}(x) = q_O(x) + (a | x)(b | x). \quad (4)$$

Il suffit alors de choisir $O \in \mathcal{F}_0$ en lequel $q = q_O$ soit de rang maximal. Alors $a \in (\operatorname{Ker} q)^\perp$, car sinon, en remplaçant O par $O + a$ (\mathcal{F}_0 étant total on voit facilement, en utilisant la relation (3), que $a \in F_0$), le rang de q augmenterait, puisque d'après (4) on a $q_{O+a}(x) = q_O(x) + (a | x)^2$. Or $a \in (\operatorname{Ker} q)^\perp$ donne $\operatorname{rg} Q \leq (\operatorname{rg} q) + 1$, et l'on conclut comme précédemment.

• Si $a = 0$, c'est-à-dire g_0 constante, on se ramène au 1er cas en rajoutant le moment d'inertie d'une masse ponctuelle non nulle placée n'importe où dans \mathcal{F}_0 , qui reste alors total, et l'on récupère l'application g initiale en rajoutant au système obtenu la masse opposée, ce qui donne au plus $(\operatorname{rg} g) + 2$ masses ponctuelles. \square

Références bibliographiques

- [1] GLEASON, Andrew M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. math. Mech. 6 (1957), 885–893.
- [2] Revue des mathématiques de l'enseignement supérieur (RMS), 3–4 (2000). Réponse R364 de H. Pépin p. 530–533.